

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x} - 2}$; b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + 1})$; c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x}$; d. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(\cos(\frac{\pi}{2}x))}{x+1}$

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$

Exercice 2

1) Soit la fonction φ définie sur \mathbb{R} par:

$$\varphi(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14$$

- Dresser le tableau de variation de φ .
- Montrer que l'équation (E₁) : $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R} et Montrer que

$$\frac{5}{2} < \alpha < 3$$

- Déduire le signe de f sur \mathbb{R} .

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x-2}$$

- Dresser le tableau de variation de f
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$ et déduire que $f(\alpha) > 0$.
- Montrer que l'équation (E₂) : $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur \mathbb{R} et que

$$-1 < \beta < 0$$

Exercice 3

1. Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur I.
 - Etudier la dérivabilité de f sur I.
 - Montrer que f admet une fonction réciproque de I vers J à déterminer
 - Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.
2. Montrer que l'équation (E) : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une solution unique α sur $]0; 1[$

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $]1 ; 2]$ et que $f(]1 ; 2]) \subset [3 ; 4]$

1. Montrer que l'équation (E) : $\frac{f(x)}{x} = 2$ admet au moins une solution sur $]1 ; 2]$
2. On suppose que f est dérivable sur $]1 ; 2[$ et que $\forall x \in]1 ; 2[: f'(x) > 2$
Montrer que La solution de l'équation (E) est unique.

Exercice 5

Soit f et g deux fonctions numériques définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}$$

1. Etudier la continuité de $f \circ g$ en 0.
2. Montrer que $g \circ f$ n'est pas continue en 0.
3. Vérifier que f et g sont continues en 0, Conclure.

Exercice 6

Soit la fonction f définie $I =]-\infty ; -\frac{1}{6}]$ par :

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x^2 + 1} - 2$$

Le tableau de signe de $f'(x)$ sur I est représenté par :

x	$-\infty$	λ	$-\frac{1}{6}$
f'(x)	+	0	-

Sachant que $f(\lambda) < 0$, Est ce que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur I.
Si oui, combien de solutions ?

FIN

Exercice 4 :

f est continue sur $[1;2]$
 $f([1;2]) \subset [3;4]$

1) . on pose $\forall x \in [1,2] : h(x) = f(x) - 2x$

. h est continue sur $[1,2]$ en tant que somme de deux fct's continues sur $[1,2]$ (la fct f et la fct $x \mapsto -2x$)

. $h(1) = f(1) - 2$

On a : $f([1,2]) \subset [3,4] \Rightarrow \forall x \in [1,2] : f(x) \in [3,4]$
 $\Rightarrow \forall x \in [1,2] : 3 \leq f(x) \leq 4$

prenons $x = 1 \Rightarrow 3 \leq f(1) \leq 4$

$$\Rightarrow 1 \leq f(1) - 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq h(1) \leq 3$$

. $h(2) = f(2) - 2 \times 2 = f(2) - 4$

on a : $\forall x \in [1,2] : 3 \leq f(x) \leq 4$

prenons $x = 2 \Rightarrow 3 \leq f(2) \leq 4$

$$\Rightarrow -1 \leq f(2) - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq h(2) \leq 0$$

Finallement $h(1) > 0$ et $h(2) < 0$

c.à.d : $h(1) \times h(2) < 0$

D'après le T.V.I, l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = 2$
admet au moins une solution sur $]1,2[$

2- h est dérivable sur $]1, 2[$ en tant que somme de deux fcts dérivables sur $]1, 2[$ et
 $\forall x \in]1, 2[: h'(x) = f'(x) - 2 > 0 \quad (f'(x) > 2)$
d'où h est strict croissante sur $]1, 2[$.

D'où la solution de l'équation (E) est unique.

Exercice 5

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$1) \quad f \circ g(x) = f(g(x)) \\ = f(\sqrt{x+1})$$

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 \quad \text{et} \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x+1 \neq 1 \quad \text{et} \quad x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \geq -1$$

$$D_{f \circ g} = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

$f \circ g$ n'est pas définie en 0

donc $f \circ g$ n'est pas continue en 0.

$$2) \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \\ = g\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x-1} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1+x-1}{x-1}}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0$$

Étudions le signe de $\frac{x}{x-1}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	—	0	+	+
x-1	—	—	0	+
$\frac{x}{x-1}$	+	0	—	+

avec $x \neq 1$

d'où $D_{g \circ f} =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

$g \circ f$ n'est pas définie à droite en 0, Alors f n'est pas continue à droite en 0

Alors $g \circ f$ n'est pas continue en 0.

3) f est continue sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ (fct rationnelle) et puisque $0 \in]-\infty, 1[$, Alors f est continue en 0.

g est continue sur $[-1, +\infty[$ car la fct $x \mapsto 1+x$ est continue sur $[-1, +\infty[$ et $\forall x \in [-1, +\infty[: 1+x \geq 0$ et puisque $0 \in [-1, +\infty[$, Alors g est continue en 0.

C/C :

si f et g sont continues en un pt, cela ne signifie pas forcément que leur composée ($f \circ g$ ou $g \circ f$) est continue en ce pt.

Exercice 6

$\forall x \in I: f(x) = x^3 + \sqrt{x^2 + 1} - 2$; $I =]-\infty, -\frac{1}{6}]$
de tableau de signe de $f'(x)$ sur I :

x	$-\infty$	λ	$-\frac{1}{6}$
$f'(x)$	+	ϕ	-

f est continue sur I en tant que somme de deux fcts continues sur I ($x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ et $x \mapsto x^3 - 2$)

Calculons $f(I)$

x	$-\infty$	λ	$-\frac{1}{6}$
$f'(x)$	+	ϕ	-
f	$-\infty$	$f(x)$	$f(-\frac{1}{6})$

$$\begin{aligned}\lim_{-\infty} f(x) &= \lim_{-\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x^3 - 2 \\ &= \lim_{-\infty} \sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} + x^3 - 2 \\ &= \lim_{-\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x^3 - 2 \\ &= \lim_{-\infty} -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x^3 - 2 \\ &= \lim_{-\infty} x(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x^2) - 2\end{aligned}$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{-\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{-\infty} x^2 = +\infty, \lim_{-\infty} x = -\infty$$

$$f(-\frac{1}{6}) = (-\frac{1}{6})^3 + \sqrt{(-\frac{1}{6})^2 + 1} - 2$$

$$= \frac{-1}{216} + \sqrt{\frac{37}{36}} - 2$$

$$= \frac{-1 - 432}{216} + \frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$= \frac{-433}{216} + \frac{36\sqrt{37}}{216}$$

$$f(-\frac{1}{6}) = \frac{36\sqrt{37} - 433}{216} < 0 \quad \text{car } (36\sqrt{37})^2 < 433^2$$

Alors $f(I) =]-\infty, f(\lambda)]$ et puisque $f(\lambda) < 0 \Rightarrow 0 \notin f(I)$

Donc d'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur I .

Fin!!!



Elite⁷⁸
academy

www.elites.ac