Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2}$; b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+1})$; c. $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin(\pi\sqrt{cosx})}{x}$; d. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{sin\left(cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1}$

e. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[4]{sinx}-\sqrt[3]{sinx}}{cos^2x}$

Exercice 2

1) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14$$

a) Dresser le tableau de variation de φ .
b) Montrer que l'équation (E$_1$) : $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et Montrer que

$$\frac{5}{2} < \alpha < 3$$

c) Déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x-2}$$

a) Dresser le tableau de variation de f
b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2-4\alpha+9}{\alpha-2}$ et déduire que $f(\alpha) > 0$.
c) Montrer que l'équation (E$_2$) : $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $\mathbb{R}$ et que

$$-1 < \beta < 0$$

Exercice 3

1. Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ x = 0 \\ \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur I.
b) Etudier la dérivabilité de f sur I.
c) Montrer que f admet une fonction réciproque de I vers J à déterminer
d) Calculer f^{-1}(x) pour tout x de J.

2. Montrer que l'équation (E) : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une solution unique α sur $]0; 1[$

Exercice 2

I) $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14$

1) a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi'(x) = 6x^2 - 22x + 20$

$= 2(3x^2 - 11x + 10)$

$\Delta = 11^2 - 4\times 3 \times 10 = 121 - 120 = 1 > 0$

$x = \dfrac{11-1}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ ou $x = \dfrac{11+1}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$5/3$		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-53}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

. $\lim\limits_{-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{-\infty} 2x^3 = -\infty$

. $\lim\limits_{+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{+\infty} 2x^3 = +\infty$

. $\varphi(2) = 2\times 2^3 - 11\times 2^2 + 20\times 2 - 14$

$= 16 - 44 + 40 - 14 = -2$

$\varphi\left(\frac{5}{3}\right) = 2\times\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 11\times\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 20\times\frac{5}{3} - 14 = 2\times\frac{125}{27} - 11\times\frac{25}{9} + \frac{100}{3} - 14 = \dfrac{250 - 275\times 3 + 900 - 14\times 27}{27} = \dfrac{-53}{27}$

1) b) φ est continue et strict croissante sur $[2, +\infty[$ et

$0 \in \varphi([2,+\infty[)$ $\left(\varphi([2,+\infty[) = [-2, +\infty[\right)$, D'après le T.V.I

l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[2,+\infty[$

. Puisque $\varphi(]-\infty, 2]) =]-\infty, -\frac{53}{27}] \Rightarrow 0 \notin]-\infty, 2]$

D'où l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas une solution sur $]-\infty, 2]$

Conclusion : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

$\cdot\ \varphi(3) = 2\times 3^3 - 11\times 3^2 + 20\times 3 - 14 = 1 > 0$

$\cdot\ \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = 2\times\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 11\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20\times\left(\frac{5}{2}\right) - 14$

$= \frac{125}{4} - 11\times\frac{25}{4} + \frac{100}{2} - 14$

$\varphi\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125 - 275 + 200 - 14\times 4}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} < 0$

Alors : $\varphi\left(\frac{5}{2}\right)\times\varphi(3) < 0 \Rightarrow \frac{5}{3} < \alpha < 2$

1) c)

$\cdot\ \varphi(]-\infty,\alpha]) =]-\infty,0] \Rightarrow \forall x\in]-\infty,\alpha] :\ \varphi(x)\leq 0$

$\cdot\ \varphi([\alpha,+\infty[) = [\varphi(\alpha), \lim\limits_{+\infty}\varphi(x)[= [0,+\infty[\Rightarrow \forall x\in[\alpha,+\infty[:\ \varphi(x)\geq 0$

Récap :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-$	0	$+$

II/ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} :\ f(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x-2}$

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} :\ f'(x) = 2x - 3 - \frac{2}{(x-2)^2}$

$= \frac{(2x-3)(x-2)^2 - 2}{(x-2)^2}$

$= \frac{(2x-3)(x^2-4x+4) - 2}{(x-2)^2}$

$= \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 12x - 12 - 2}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 14}{(x-2)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$

Tableau de variation

x	$-\infty$		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

. $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} x^2 - 3x + \dfrac{2}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} x^2-3x = \lim\limits_{-\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{2}{x-2} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

. $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x^2 - 3x + \dfrac{2}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} x^2-3x = \lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2}{x-2} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x^2 - 3x + \dfrac{2}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2) = 0$ et $\forall x>2 : x-2>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2}{x-2} = +\infty$

. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x^2-3x = -2$

. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x^2 - 3x + \dfrac{2}{x-2} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2) = 0$ et $\forall x>2 : x-2<0$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2}{x-2} = -\infty$

. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x^2-3x = -2$

2) b) α est la solution de l'équation $\varphi(x) = 0 \iff \varphi(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2} \iff (\alpha-2) f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9$$

$$\iff (\alpha-2)\left[\alpha^2 - 3\alpha + \frac{2}{\alpha-2}\right] = \frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9$$

$$\iff (\alpha-2)(\alpha^2-3\alpha) + 2 = \frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9$$

$$\iff \alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 + 6\alpha + 2 = \frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9$$

$$\iff 2\alpha^3 - 6\alpha^2 - 4\alpha^2 + 12\alpha + 4 = \alpha^2 - 8\alpha + 18$$

$$\iff 2\alpha^2 - 11\alpha^2 + 20\alpha - 14 = 0$$

$$\iff \varphi(\alpha) = 0$$

ce qui est vrai, Alors $f(\alpha) = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$

- $f(\alpha) = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$

- Étudions le signe de $\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9$

$\Delta = 4^2 - 9 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16 - 18 = -2 < 0$

Alors $\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9 > 0$

- Et $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha - 2 > 0$

d'où $f(\alpha) = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2} > 0$

2) c) . f est continue et strict décroissante sur $]-\infty, 2[$

$0 \in f(]-\infty, 2[)$ $\quad (f(]-\infty, 2[) = \mathbb{R})$

D'après le T.V.I, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\infty, 2[$.

. $0 \notin f(]2, +\infty[)$ $\quad \left(f(]2, +\infty[) = [f(\alpha); +\infty[\right.$ et $\left. f(\alpha) > 0 \right)$

D'où, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]2, +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + \dfrac{2}{0 - 2} = -1 < 0$

. $f(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + \dfrac{2}{-1 - 2} = 1 + 3 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{12 - 2}{3} = \dfrac{10}{3} > 0$

. $f(0) \times f(-1) < 0$

$\Rightarrow \quad -1 < \beta < 0$

Exercice 3 :

1) $\forall x \in I : f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1-x}}{x} & ; x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$

a) . la fct $x \mapsto 1-x$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,1]$ et $\forall x < 1 : 1-x > 0$, d'où la fct $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,1]$, Alors f est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,1]$ en tant que rapport de deux fcts continues sur $]-\infty,0[$ et $]0,1]$ ($x \mapsto x$ et $x \mapsto -1+\sqrt{1-x}$) avec $\forall x \in]-\infty,1] \setminus \{0\} : x \neq 0$.

. $f(0) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1-x)-1}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1-x}+1)} = -\frac{1}{2} = f(0)$$

. Alors f est continue en 0

Finalement, f est continue sur $]-\infty,0[$, $]0,+\infty[$ et en 0

Donc elle est continue sur $I =]-\infty, \;]$

b) . la fct $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ et $\forall x \in]-\infty,1[\setminus \{0\} : 1-x > 0$, Alors la fct $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$. Alors f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ en tant que rapport de deux fcts dérivables sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ ($x \mapsto x$ et $x \mapsto -1+\sqrt{1-x}$) avec $\forall x \in]-\infty,1[\setminus \{0\} : x \neq 0$

. $f(0) = -\frac{1}{2}$.

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1+\sqrt{1-x}}{x}+\frac{1}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2+2\sqrt{1-x}+x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-2+2\sqrt{1-x}}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(2-x-2\sqrt{1-x})}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1-x-2\sqrt{1-x}+1)}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-((\sqrt{1-x})^2-2\sqrt{1-x}+1)}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} - \frac{(\sqrt{1-x}-1)^2}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2}\left(f(x)\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-1}{2}\times\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8} \in \mathbb{R}$$

d'où f est dérivable en 0

Alors f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ et en 0
d'où f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et n'est pas dérivable sur I.

c) f est dérivable sur $]-\infty, 1[\setminus\{0\}$

$$\forall x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\} : f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x}-1)'x - (\sqrt{1-x}-1)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}+1}{x^2}$$

$$= \frac{-1 - 2(1-x) + 2\sqrt{1-x}}{2x^2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-1-2+2x+2\sqrt{1-x}}{2x^2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-3+2x+2\sqrt{1-x}}{2x^2\sqrt{1-x}}$$

$$2x-3+2\sqrt{1-x} < 0 \iff 2\sqrt{1-x} < 3-2x$$

$$\iff (2\sqrt{1-x})^2 < (3-2x)^2$$

$$\iff 4(1-x) < 9-12x+4x^2$$

$$\iff 4x^2-8x+5 > 0$$

$\Delta = 8^2 - 4\times4\times5 = 64-80 = -16 < 0$

d'où $4x^2-8x+5>0$, ce qui est vrai

d'où $2x-3+2\sqrt{1-x} < 0$

donc $\forall x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\} : f'(x) < 0$

Alors f est strict décroissante sur I.

et puisque f est continue sur I, Alors f admet une fct réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$

$$J = f(]-\infty, 1]) = [f(1); \lim_{-\infty} f(x)[= [-1, 0[$$

$\cdot\ f(1) = \dfrac{-1+\sqrt{1-0}}{1} = -1$

$\cdot\ \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-1+\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-1+\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-1-x\sqrt{1/x^2-1/x}}{x}$

$= \lim\limits_{-\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(-\frac{1}{x}-\sqrt{1/x^2-1/x}\right)}{\cancel{x}} = 0$ car $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

d) $\forall x \in J \setminus \{\frac{-1}{2}\} : f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \quad (y \in I \setminus \{0\})$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{1-y}}{y} = x$

$\Leftrightarrow -1+\sqrt{1-y} = xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-y} = xy+1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{1-y})^2 = (xy+1)^2$

$\Leftrightarrow 1-y = x^2y^2+2xy+1$

$\Leftrightarrow x^2y^2+2xy+y = 0$

$\Leftrightarrow x^2y^2+y(1+2x) = 0$

$\Leftrightarrow y(x^2y+1+2x) = 0$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $x^2y+1+2x=0$

$\cdot\ y \neq 0 \qquad \Leftrightarrow x^2y = -1-2x$

$\cdot\ x \neq 0 \qquad \Leftrightarrow y = \dfrac{-1-2x}{x^2}$

$$\forall x \in J \setminus \{0\} : f^{-1}(x) = \frac{-1-2x}{x^2}$$

$f(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(-\frac{1}{2}) = 0$

Finalement, $\forall x \in J : f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{-1-2x}{x^2} & ; x \neq \frac{-1}{2} \\ 0 & ; x = \frac{-1}{2} \end{cases}$

2) On pose : $\forall x \in]0,1[: \quad h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x + 1$

. h est continue sur $]0,1[$ en tant que somme de deux fcts continues sur $]0,1[$ ($x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$ et la fct f)

. soit $(x,y) \in]0,1[: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ et $-\frac{1}{2}x > -\frac{1}{2}y$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x > f(y) - \frac{1}{2}y$$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x + 1 > f(y) - \frac{1}{2}y + 1$$

$$\Rightarrow h(x) > h(y)$$

d'où h est strict décroissante sur $]0,1[$

. $h(1) = f(1) - \frac{1}{2}\times 1 + 1 = -1 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2} < 0$

. $h(0) = f(0) - \frac{1}{2}\times 0 + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow h(1) \times h(0) < 0$

D'après le T.V.I, l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une solution unique α sur $]0,1[$.

Elite[78] academy

www.elites.ac