Examen Blanc Oct 26 Maths - SEXP 2025/2026	Limites Continuité Dérivation	Elite academy www.elites.ac

CONSIGNES

- ⇒ L'épreuve dure 3 heures à ne pas dépasser
- ⇒ Essayez de ne pas utiliser la calculatrice
- ⇒ Cet examen comporte 6 Exercices
- ⇒ Les exercices sont indépendants
- ⇒ Prenez votre temps et lisez bien l'énoncé avant de commencer à répondre aux questions
- ⇒ Optionnel : Utiliser des feuilles blanches pour répondre et l'application pour prendre des scans de vos réponses et le rendre en PDF

BONNE CHANCE

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}-2}$; b. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+1})$; c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x}$; d. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1}$

e. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$

Exercice 2

1) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\varphi(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14$$

a) Dresser le tableau de variation de φ .
b) Montrer que l'équation (E_1) : $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et Montrer que

$$\frac{5}{2} < \alpha < 3$$

c) Déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x-2}$$

a) Dresser le tableau de variation de f
b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$ et déduire que $f(\alpha) > 0$.
c) Montrer que l'équation (E_2) : $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur $\mathbb{R}$ et que

$$-1 < \beta < 0$$

Exercice 3

1. Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \ x = 0 \\ \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} & si \ x \neq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur I.
b) Etudier la dérivabilité de f sur I.
c) Montrer que f admet une fonction réciproque de I vers J à déterminer
d) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

2. Montrer que l'équation (E) : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une solution unique α sur $]0; 1[$

Exercice 1

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x} - 2}$

on pose : $t = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \iff t^3 = x$

$x \to 1 \iff t \to 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x + \sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{t \to 1} \frac{t - \sqrt{t^3}}{t^3 + t - 2} = \lim_{t \to 1} \frac{t - t\sqrt{t}}{t^3 + t - 2}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(1 - \sqrt{t})}{t^3 - 1 + t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(1 - \sqrt{t})}{(t-1)(t^2 + t + 1) + (t - 1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(1 - \sqrt{t})}{(t-1)[(t^2 + t + 1) + 1]}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(1 - \sqrt{t})(1 + \sqrt{t})}{(t-1)(t^2 + t + 2)} \times \frac{1}{(1 + \sqrt{t})}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{1 - t}{(t - 1)} \cdot \frac{t}{(1 + \sqrt{t})(t^2 + t + 2)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{-\cancel{(t - 1)}}{\cancel{t - 1}} \cdot \frac{t}{(1 + \sqrt{t})(t^2 + t + 2)}$$

$$= -1 \times \frac{1}{(1+1)(1+1+2)} = -\frac{1}{8}$$

b) $\lim\limits_{+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x.\sqrt[3]{x^3+1}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x.\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x.x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$\lim\limits_{+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x.\sqrt[3]{x^3+1}\right) = -\infty$

car $\lim x^2 = +\infty$ et $\lim \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \sqrt[3]{x^3+1} = +\infty$

Bonus : . $\lim\limits_{+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x}$

on pose la fct $f(x) = \sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)$

la fct f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: f'(x) = \left(\pi\sqrt{\cos x}\right)' \cos\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)$

$= \pi \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} . \cos\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)$

$= -\frac{\pi}{2} \times \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} . \cos\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)$

or f est dérivable en 0, Alors

$f'(0) = \frac{-\pi}{2} \times \frac{0}{1} \times \cos(\pi) = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\cos x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \times \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} \cdot \lim \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$; on pose : $t = x+1 \iff x = t-1$

$x \to -1 \iff t \to 0$

. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\frac{\pi}{2}\times t} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$; on pose : $u = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \to -1 \iff u \to 0$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$

D'où $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$

M2 :

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)}$

avec : $f(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)' \cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -\frac{\pi}{2} \times (-1) \times 1 = \frac{\pi}{2}$

d'où $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{x+1} = f'(-1) = \frac{\pi}{2}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

e) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin^2 x}$$

on pose : $t = \sin x$; $x \to \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[4]{t} - \sqrt[3]{t}}{1-t^2}$$

on pose $t = u^{12}$; $t \to 1 \Leftrightarrow u = 1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{u\to 1} \frac{\sqrt[4]{u^{12}} - \sqrt[3]{u^{12}}}{1-(u^{12})^2}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^3 - u^4}{(1-u^{12})(1+u^{12})}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^3(1-u)}{(1-u^6)(1+u^6)(1+u^{12})}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^3(1-u)}{(1-u^3)(1+u^3)(1+u^6)(1+u^{12})}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^3\cancel{(1-u)}}{\cancel{(1-u)}(1+u+u^2)(1+u^3)(1+u^6)(1+u^{12})}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^3}{(1+u+u^2)(1+u^3)(1+u^6)(1+u^{12})}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{(1+1+1)(1+1)(1+1)(1+1)} = \frac{1}{3\times 2\times 2\times 2} = \frac{1}{24}$$

M2 : $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[4]{t} - \sqrt[3]{t}}{1-t^2}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(\sqrt[4]{t} - \sqrt[3]{t})(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t} - \sqrt[3]{t^2}}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(\sqrt{t})^3 - t^2}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})} \times \frac{1}{(t + \sqrt{t}\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^4})}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t\sqrt{t} - t^2}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})} \times \frac{1}{(t + \sqrt{t}\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^4})}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(\sqrt{t} - t)}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})} \times \frac{1}{(t + \sqrt{t}\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^4})}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(\sqrt{t} - t)(\sqrt{t} + t)}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})(t + \sqrt{t}\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^4})(\sqrt{t} + t)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(t - t^2)}{(1-t)(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})(t + \sqrt{t}\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^4})(\sqrt{t} + t)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t(\cancel{1-t})}{(\cancel{1-t})(1+t)(\sqrt[4]{t} + \sqrt[3]{t})(t + \sqrt{t}\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^4})(\sqrt{t} + t)}$$

$$= \frac{1}{(1+1)(1+1)(1+1+1)(1+1)} = \frac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 2} = \frac{1}{24}$$

Elite 78 academy

www.elites.ac