

### Problème 3 (4 pts)

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^4(\ln x - 1)^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm)

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de  $+\infty$
2. a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0  
b) Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement
3. a) Montrer que  $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$   
b) Dresser le tableau de variations de  $f$
4. a) Sachant que  $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$ , étudier le signe de  $f''(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .  
b) Dédire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses
5. a) Construire la courbe (C) dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (on prend :  $\sqrt{e} \approx 1,6$  et  $e^2 \approx 7,2$ )  
b) En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation  $x^2(\ln x - 1) = -1$   
c) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(|x|)$

Construire  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6. On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$   
Vérifier que  $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$

FIN

### Problème 3

$$\forall x \in [0, +\infty[ : f(x) = \begin{cases} x^4 (\ln x - 1)^2 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$1) \cdot \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x^4 (\ln x - 1)^2 = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{+\infty} x^4 = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\cdot \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x^4 (\ln x - 1)^2}{x} = \lim_{+\infty} x^3 (\ln x - 1)^2 = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{+\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} \ln x = +\infty$$

Alors (c) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) au voisinage de  $+\infty$

$$2) a) \cdot f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^4 (\ln x - 1)^2 \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^4 ((\ln x)^2 - 2 \ln x + 1) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^4 (\ln x)^2 - 2x^4 \ln x + x^4 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x)^2 - 2 \cdot x^4 \ln x + x^4 \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$$

$$\text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^4 \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^4 = 0$$

$$\underline{M2}: \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^4 (\ln x - 1)^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \cdot (x (\ln x - 1))^2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \cdot (x \ln x - x)^2 = 0$$

$$\text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$$

D'où  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 = f(0)$ , donc  $f$  est continue à droite en 0

$$\begin{aligned}
 2) b) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^4 (\ln x - 1)^2}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (\ln x - 1)^2 \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \cdot x^2 (\ln x - 1)^2 \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \cdot (x \ln x - x)^2 \\
 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= 0 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

D'où  $f$  est dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique :

(C) admet une demi-tangente horizontale à droite au pt d'abscisse  $x=0$ ,  $O(0,0)$

3) a)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in ]0, +\infty[ : f'(x) &= (x^4)' (\ln x - 1)^2 + x^4 [( \ln x - 1)^2]' \\
 &= 4x^3 (\ln x - 1)^2 + x^4 \cdot 2(\ln x - 1)' (\ln x - 1) \\
 &= 4x^3 (\ln x - 1)^2 + 2x^4 \cdot \frac{1}{x} (\ln x - 1) \\
 &= 4x^3 (\ln x - 1)^2 + 2x^3 (\ln x - 1) \\
 &= 2x^3 (\ln x - 1) [2(\ln x - 1) + 1] \\
 &= 2x^3 (\ln x - 1) (2\ln x - 2 + 1) \\
 f'(x) &= 2x^3 (\ln x - 1) (2\ln x - 1)
 \end{aligned}$$

3) b) le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ .

$$\cdot \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\cdot \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

$$\cdot \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

$$\cdot 2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

$$\cdot 2 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$$

$$\cdot 2 \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$$

Tableau de variation de  $f$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$e$	$+\infty$
$\ln x - 1$	—		—	+
$2 \ln x - 1$	—	0	+	+
$f'(x)$	+	0	0	+
$f$	0	$\nearrow \frac{e^2}{4}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

$$\cdot f(e) = e^4 (\ln(e) - 1)^2 = 0$$

$$\cdot f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^4 (\ln(\sqrt{e}) - 1)^2$$

$$= e^2 \cdot (\ln(e^{\frac{1}{2}}) - 1)^2$$

$$= e^2 \left(\frac{1}{2} \ln e - 1\right)^2$$

$$= e^2 \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2$$

$$f(\sqrt{e}) = e^2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{e^2}{4}$$

$$4) a) \forall x \in ]0, +\infty[ : f''(x) = 2x^2 (6 \ln x - 5) \ln x$$

le signe de  $f''(x)$  est celui de  $(6 \ln x - 5) \ln x$

$$\cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\cdot \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\cdot \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\cdot 6 \ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow 6 \ln x = 5 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$$

$$\cdot 6 \ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow 6 \ln x > 5 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x > e^{\frac{5}{6}}$$

$$\cdot 6 \ln x - 5 < 0 \Leftrightarrow 6 \ln x < 5 \Leftrightarrow \ln x < \frac{5}{6} \Leftrightarrow x < e^{\frac{5}{6}}$$

$x$	0	1	$e^{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$6 \ln x - 5$	—		—	+
$\ln x$	—	0	+	+
$f''(x)$	+	0	0	+

$$1 < e^{\frac{5}{6}}$$



$$5)c) \forall x \in \mathbb{R}: g(x) = f(|x|)$$

. Mg la fct  $g$  est paire

$$. x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

$$. \forall x \in \mathbb{R}: g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

Ainsi  $g$  est une fct paire

Tracé de la courbe sur le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

6)  $h$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, +\infty[: h'(x) &= (x^5)'(\ln x - 1)^2 + x^5 ((\ln x - 1)^2)' \\ &= 5x^4 (\ln x - 1)^2 + x^5 \times 2 (\ln x - 1)' (\ln x - 1) \\ &= 5x^4 (\ln x - 1)^2 + 2x^5 \times \frac{1}{x} (\ln x - 1) \\ &= 5x^4 (\ln x - 1)^2 + 2x^4 (\ln x - 1) \\ h'(x) &= 5f(x) + 2x^4 (\ln x - 1) \end{aligned}$$

Fin 😊

[www.elites.ac](http://www.elites.ac)



**Elite**<sup>78</sup>  
academy