Problème 1 (4pts)

Première partie :

On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)}$
2. Étudier la dérivabilité de la fonction $\boldsymbol{f}$ à droite au point 0
3. Montrer que la fonction $\boldsymbol{f}$ est **décroissante** sur l'intervalle $[0,1]$ et **croissante** sur l'intervalle $[1,+\infty[$

Deuxième partie :

On considère la suite (u_n) définie par :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = f(\mathbf{u_n})$

1. Montrer par **récurrence** que :$1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite (u_n) est **décroissante**.
3. En déduire que la suite (u_n) est **convergente** et calculer sa **limite**.

Troisième partie :

On considère la fonction gg définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(x) = ln(x - 2\sqrt{x} + 2)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x)}$

   b) Étudier la **branche infinie** de la courbe (C)

   c) Étudier la dérivabilité de la fonction $\boldsymbol{f}$ à droite au point 0

2. Étudier les **variations** de la fonction g

3. **Construction de la courbe (C)**

4. Soit h la restriction de la fonction gg à l'intervalle $[1,+\infty[$

   a) Montrer que h admet une **fonction réciproque**, en précisant son domaine de définition

   b) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à J

Problème 2 (6pts)

I) Étude de la fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $[0,+\infty[$, puis montrer que la fonction g est **strictement décroissante** sur$[0,+\infty[$.

   b) En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$

2. Montrer que : $0 < \ln(1 + x) < x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

II) Étude de la fonction f

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

et (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec une **unité de 1 cm**.

1. Montrer que l'**ensemble de définition** de la fonction est : D=]−∞,−1[∪]1,+∞[
2. a) Montrer que la fonction f est **impaire**
   b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$
3. a) Montrer que :

   $\forall x \in D, f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$

   b) En déduire les **variations** de la fonction f sur l'intervalle]1,+∞[
4. a) Vérifier que la droite (Δ) d'équation y = x est une **asymptote oblique** de la courbe (C)

   b) Étudier le signe de : $ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (On rappelle que : $\forall x \in D, \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$).

   c) En déduire la **position relative** de la courbe (C) et de la droite asymptote (Δ)
5. Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prendra : $\sqrt{3} \approx 1.7$ et $f(\sqrt{3}) = 3$)

III) Étude d'une suite numérique

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq2}$ définie par :

$$\mathbf{u_n = f(n) - n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*-\{1\}}$$

1) a) Vérifier que : $u_n = \ln(1 + \frac{2}{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

2) a) Montrer que : $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

(On pourra utiliser le résultat de la question I.2)

b) Calculer : $\lim u_n$

Problème 2

I/ $\forall x \in [0,+\infty[: \quad g(x) = \ln(1+x) - x$

1) a) g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$\forall x \in [0,+\infty[: g'(x) = \dfrac{(1+x)'}{1+x} - 1 = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-1-x}{1+x} = -\dfrac{x}{1+x} \leq 0$

car $x+1 > 0$ et $x \geq 0$

D'où g est strict décroissante sur $[0,+\infty[$

1) b) . g continue et strict décroissante sur $[0,+\infty[$

. $x \in [0,+\infty[\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow g(x) \leq g(0) \Rightarrow g(x) \leq 0 \quad (g(0) = \ln(1+0) - 0 = 0)$

2) on a : $\forall x \in]0,+\infty[: \quad g(x) < 0 \Rightarrow \ln(1+x) - x < 0$

$\Rightarrow \ln(1+x) < x$ ①

on a : $x \in]0,+\infty[\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow \ln(1+x) > 0$ ②

① + ②, $\forall x \in]0,+\infty[: \quad 0 < \ln(1+x) < x$

II/ $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

1) $x \in D \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} > 0$ et $x - 1 \neq 0$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

$\Rightarrow \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[: \dfrac{x-1}{x+1} > 0$

D'où $D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2) a) $x \in D \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$

$\Leftrightarrow -x > 1$ ou $-x < -1$

$\Leftrightarrow -x < -1$ ou $-x > 1$

$\Leftrightarrow -x \in D$

$$\left\{ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right) \right.$$

$$\forall x \in D : f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$
$$= -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$= -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$= -\left(x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

Alors f est une fct impaire.

2) b) $\cdot \lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

$\cdot \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0$ et $\forall x>1 : x-1>0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

avec $X = \frac{x+1}{x-1}$

3) a) f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D : f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 1 + \frac{\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

$$= 1 + \frac{-2(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = 1 - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2-1-2}{x^2-1} = \frac{x^2-3}{x^2-1}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-3 $\quad$ ($\forall x>1 : x^2-1>0$)

$x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

$\cdot$ Si $x > \sqrt{3} \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow x^2-3 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

$\cdot$ si $x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow x^2-3 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

Donc f est strict croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strict décroissante sur $]1, \sqrt{3}]$

4) a) $\cdot \lim\limits_{+\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim\limits_{+\infty} \left(x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - x\right)$

$\lim\limits_{+\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim\limits_{+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 0$

car $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ et $\ln(1) = 0$

$\cdot \lim\limits_{-\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim\limits_{-\infty} \left(x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - x\right)$

$\lim\limits_{-\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim\limits_{-\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 0$

car $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ et $\ln(1) = 0$

d'où l'équation $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

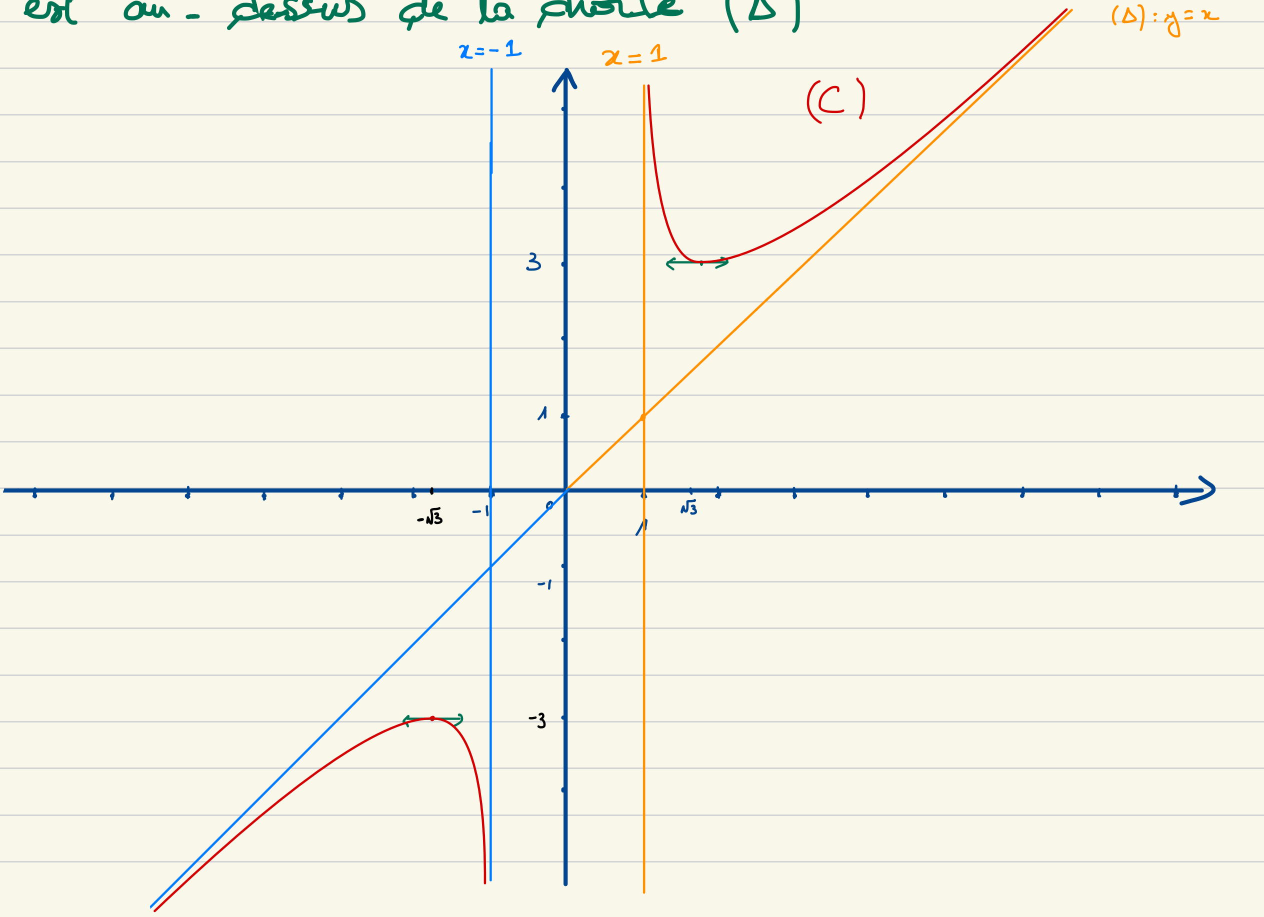
4) b) $\forall x \in D : \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

$\cdot$ si $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{x-1} > 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{2}{x-1} > 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} > 1 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) > 0$

$\forall x \in]1, +\infty[: f(x) - y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) > 0$

Alors (C) est au-dessus de la droite (Δ)

5)



III/ $\forall n \geq 2 : \quad U_n = f(n) - n$

1) a) $\forall n \geq 2 : \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$U_n = f(n) - n = n + \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

d'où $\forall n \geq 2 : U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$

2) b) $\forall n \geq 2 : \quad U_{n+1} - U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n^2+2n-n-2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+n-2}{n^2+n}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right)$$

on a : $n \geq 2 \Rightarrow n^2+n > 0 \Rightarrow \frac{2}{n^2+n} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{n^2+n} < 0$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{n^2+n} < 1 \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right) < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

d'où $(U_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

2) a) on a : $\forall x \in]0, +\infty[: \quad 0 < \ln(1+x) < x$

or : $\frac{2}{n-1} > 0$ car $n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 > 0$

d'où $\quad 0 < \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$

$\forall n \geq 2 : \quad 0 < U_n < \frac{2}{n-1}$

2) b) $\lim \frac{2}{n-1} = 0$, d'où $\lim U_n = 0$

D'après le théorème de comparaison