

Problème 1 (4pts)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

1. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 0
3. Montrer que la fonction f est **décroissante** sur l'intervalle $[0, 1]$ et **croissante** sur l'intervalle $[1, +\infty[$

Deuxième partie :

On considère la suite (u_n) définie par :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par **réurrence** que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite (u_n) est **décroissante**.
3. En déduire que la suite (u_n) est **convergente** et calculer sa **limite**.

Troisième partie :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x - 2\sqrt{x} + 2)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
b) Étudier la **branche infinie** de la courbe (C)
c) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 0
2. Étudier les **variations** de la fonction g
3. **Construction de la courbe (C)**
4. Soit h la restriction de la fonction g à l'intervalle $[1, +\infty[$
a) Montrer que h admet une **fonction réciproque**, en précisant son domaine de définition
b) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à J

Problème 2 (6pts)

I) Étude de la fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $[0, +\infty[$, puis montrer que la fonction g est **strictement décroissante** sur $[0, +\infty[$.
b) En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$
2. Montrer que : $0 < \ln(1 + x) < x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

Problème 1 :

$$\text{I/ } \forall x \in [0, +\infty[: f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x} + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} \right)$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} \right] = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim x = +\infty$$

$$2) . f(0) = 0 - 2\sqrt{0} + 2 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - 2\sqrt{x} + 2 - 2}{x}$$
$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - 2 \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

3) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = 1 - 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1$.

$$\cdot \text{ si } x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

$$\cdot \text{ si } 0 < x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[\Rightarrow f$ est décroissante sur $[0, 1]$.

II/ $U_0 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n)$

1) Initi : Pour $n=0$: $1 \leq U_0 \leq 2$ car $U_0 = 2$

Hévi : Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons $1 \leq U_n \leq 2$ et Hq : $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

on a : $1 \leq U_n \leq 2$ et f est continue et strict croissante sur $[1, 2]$, donc : $f(1) \leq f(U_n) \leq f(2)$

$$f(1) = 1 ; f(2) = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 4 - 2\sqrt{2} < 2$$

$$\text{car } 1 < \sqrt{2} \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow 4 - 2\sqrt{2} < 2$$

Ainsi $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

C/C : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq U_n \leq 2$

$$\begin{aligned} 2) \forall x \in [1, 2] : f(x) - x &= x - 2\sqrt{x} + 2 - x \\ &= 2 - 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$f(x) - x = 2(1 - \sqrt{x})$$

$$\text{on a : } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{x} \leq 0$$

$$\text{d'où } \forall x \in [1, 2] : f(x) - x < 0$$

$$\text{on a : } U_n \in [1, 2] \Rightarrow f(U_n) - U_n < 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n < 0$$

d'où (U_n) est décroissante

3) (U_n) est décroissante et minorée par 1, Alors (U_n) converge.

$\left. \begin{array}{l} \cdot f \text{ est continue sur } [1, 2] \\ \cdot f([1, 2]) = [1, 4 - 2\sqrt{2}] \subset [1, 2] \\ \cdot \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n) \\ \cdot U_0 \in [1, 2] \\ \cdot (U_n) \text{ est convergente} \end{array} \right\}$ Alors $\lim U_n = L$ est la solution de l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$

D'où $\lim U_n = 1$

III/ $\forall x \in [0, +\infty[: g(x) = \ln(x - 2\sqrt{x} + 2)$

1) a) $\lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} \ln(x - 2\sqrt{x} + 2) = +\infty$

car $\lim_{+\infty} (x - 2\sqrt{x} + 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ avec $X = x - 2\sqrt{x} + 2$

1) b) $\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln\left(x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x}\right)\right)}{x}$

$= \lim_{+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right)}{x}$

$\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right)}{x} = 0$

car $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\ln(1) = 0$

Me : $\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2)}{x}$

$= \lim_{+\infty} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2)}{(x - 2\sqrt{x} + 2)} \times \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{x}$

$= \lim_{+\infty} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2)}{x - 2\sqrt{x} + 2} \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right)$

$\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \times 1 = 0$

car $\lim_{+\infty} (x - 2\sqrt{x} + 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ avec $X = x - 2\sqrt{x} + 2$

et $\lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ainsi (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses,

1) c) $g(0) = \ln(f(0)) = \ln 2$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x - 2\sqrt{x} + 2) - \ln 2}{x}$

$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln\left(\frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{2}\right)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln\left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{2} + 1\right)}{x}$

$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln\left(1 + \frac{x - 2\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{2}\right)} \times \frac{\left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{2}\right)}{x}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln\left(1 + \frac{x - 2\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{2}\right)} \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

$$\text{Car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - 2\sqrt{x}}{2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ avec } x = \frac{x - 2\sqrt{x}}{2}$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc g n'est pas dérivable à droite en 0.

2) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[: g'(x) = [\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}}{x-2\sqrt{x}+2}$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1+1)}$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}((\sqrt{x}-1)^2+1)}$$

le signe de $g'(x)$ est celui de $\sqrt{x}-1$

$$\cdot \text{ si } x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0$$

$$\cdot \text{ si } 0 < x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0$$

donc g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[\Rightarrow g$ est décroissante sur $[0, 1]$.

M2 :

$$\cdot \text{ soit } (x, y) \in [0, 1] : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) > \ln(f(y))$$

$$\Rightarrow g(x) > g(y)$$

Alors g est décroissante sur $[0, 1]$

$$\cdot \text{ soit } (x, y) \in [1, +\infty[: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) < \ln(f(y))$$

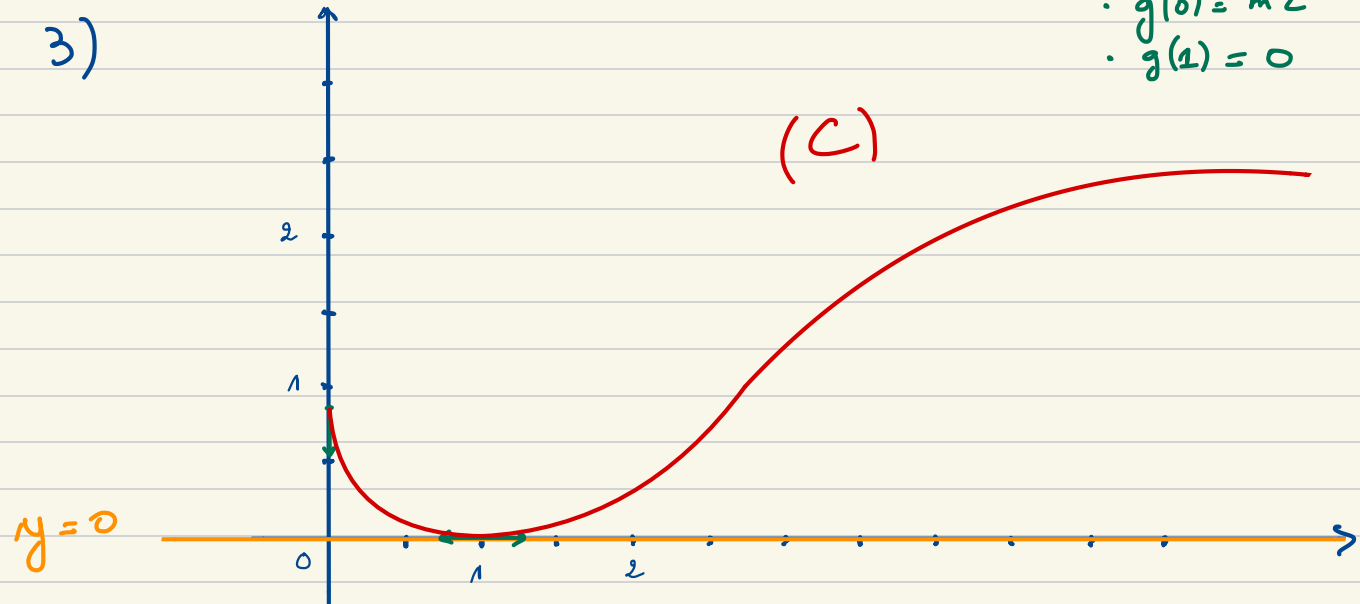
$$\Rightarrow g(x) < g(y)$$

Alors g est croissante sur $[1, +\infty[$

3)

$$\begin{aligned} \cdot g(0) &= \ln 2 \\ \cdot g(1) &= 0 \end{aligned}$$

(C)



$$4) \quad \forall x \in [1, +\infty[: h(x) = g(x) = \ln(f(x))$$

a) f est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[: f(x) > 0$

car $f(x) = (\sqrt{x}-1)^2 + 1 > 0$, Alors $h = \ln(f)$ est continue sur $[1, +\infty[$. et puisque h est strict croissante sur $[1, +\infty[$

Alors h admet une fct réciproque h^{-1} définie sur $J = h([1, +\infty[)$

$$J = [h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[= [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$$

$$b) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ : h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x \quad (y \in [1, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow \ln(y - 2\sqrt{y} + 2) = x$$

$$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} + 2 = e^x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)^2 + 1 = e^x$$

$$(x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0) \Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)^2 = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{y}-1)^2} = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{y}-1| = \sqrt{e^x - 1}$$

$$(y > 1 \Rightarrow \sqrt{y} > 1 \Rightarrow \sqrt{y}-1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{y}-1 = \sqrt{e^x - 1}$$

$$|\sqrt{y}-1| = \sqrt{y}-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 + \sqrt{e^x - 1}$$

$$\Leftrightarrow y = (\sqrt{e^x - 1} + 1)^2$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^+ : h^{-1}(x) = (\sqrt{e^x - 1} + 1)^2$$

www.elites.ac



Elite⁷⁸
academy