Examen Blanc Jan 25 Maths - SEXP 2024/2025	Suites - Fcts logarithmiques – Nombres complexes I	www.elites.ac

CONSIGNES

- ⇒ L'épreuve dure 3 heures à ne pas dépasser
- ⇒ Essayez de ne pas utiliser la calculatrice
- ⇒ Cet examen comporte 2 Exercices et 3 problèmes
- ⇒ Les exercices sont indépendants
- ⇒ Prenez votre temps et lisez bien l'énoncé avant de commencer à répondre aux questions
- ⇒ Optionnel : Utiliser des feuilles blanches pour répondre et l'application pour prendre des scans de vos réponses et le rendre en PDF

BONNE CHANCE

Composantes du sujet

	PARTIES	BAREME
Exercice 1	**Suites numériques**	**2 / 20**
Exercice 2	**Nombres complexes I**	**4 / 20**
Problème 1	**Etude d’une fonction numérique et suites numériques**	**4 / 20**
Problème 2	**Etude d’une fonction numérique et suites numériques**	**6 / 20**
Problème 3	**Etude d’une fonction numérique**	**4 / 20**

Exercice 1 (2pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u_n} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

1. a) Montrer que $u_n > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (u_n) est **décroissante.**

c) En déduire que la suite (u_n) est **convergente**.

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

a) Montrer que (v_n) est une **suite géométrique** et déterminer sa **raison** et son **premier terme**.

b) Écrire u_n en fonction de n, puis en déduire la **limite** de la suite (u_n)

c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2025}$

Exercice 2 (4pts)

1) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -\frac{i\sqrt{2}}{1+i}$

b) $z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$

c) $z_3 = \sin x + i\cos x$

2) On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

a) Écrire z_3 sous forme algébrique.

b) Écrire z_3 sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3) Déterminer l 'ensemble des points M tel que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

4) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $R(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$, $z_2 = 1 + i$, et $z_3 = 1 - i$

a) Placer dans le repère R les points A, B et C

b) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$

et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

c) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment [BC] et en déduire que : $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

d) Écrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique, puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Problème 1 (4pts)

Première partie :

On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)}$
2. Étudier la dérivabilité de la fonction $\boldsymbol{f}$ à droite au point 0
3. Montrer que la fonction $\boldsymbol{f}$ est **décroissante** sur l'intervalle $[0,1]$ et **croissante** sur l'intervalle $[1,+\infty[$

Deuxième partie :

On considère la suite (u_n) définie par :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = f(\mathbf{u_n})$

1. Montrer par **récurrence** que :$1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la suite (u_n) est **décroissante**.
3. En déduire que la suite (u_n) est **convergente** et calculer sa **limite**.

Troisième partie :

On considère la fonction gg définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(x) = ln(x - 2\sqrt{x} + 2)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x)}$
   b) Étudier la **branche infinie** de la courbe (C)

   c) Étudier la dérivabilité de la fonction $\boldsymbol{f}$ à droite au point 0

2. Étudier les **variations** de la fonction g

3. **Construction de la courbe (C)**

4. Soit h la restriction de la fonction gg à l'intervalle $[1,+\infty[$
   a) Montrer que h admet une **fonction réciproque**, en précisant son domaine de définition
   b) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à J

Problème 2 (6pts)

I) Étude de la fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $[0,+\infty[$, puis montrer que la fonction g est **strictement décroissante** sur$[0,+\infty[$.

   b) En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$

2. Montrer que : $0 < \ln(1 + x) < x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

II) Étude de la fonction f

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

et (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec une **unité de 1 cm**.

1. Montrer que l'**ensemble de définition** de la fonction est : D = $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
2. a) Montrer que la fonction f est **impaire**
   b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$
3. a) Montrer que :

   $\forall x \in D, f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$

   b) En déduire les **variations** de la fonction f sur l'intervalle $]1,+\infty[$
4. a) Vérifier que la droite (Δ) d'équation y = x est une **asymptote oblique** de la courbe (C)

   b) Étudier le signe de : $ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (On rappelle que : $\forall x \in D, \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$)

   c) En déduire la **position relative** de la courbe (C) et de la droite asymptote (Δ)
5. Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prendra : $\sqrt{3} \approx 1.7$ et $f(\sqrt{3}) = 3$)

III) Étude d'une suite numérique

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq2}$ définie par :

$u_n = f(n) - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

1) a) Vérifier que : $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

2) a) Montrer que : $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$

(On pourra utiliser le résultat de la question I.2)

b) Calculer : $\lim u_n$

Problème 3 (4 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^4(\ln x - 1) & si \ \ x > 0 \\ 0 & si \ \ x = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$
2. a) Montrer que f est continue à droite en 0
   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement
3. a) Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$
   b) Dresser le tableau de variations de f
4. a) Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$.
   b) Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses
5. a) Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1{,}6$ et $e^2 \approx 7{,}2$)
   b) En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$
   c) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(|x|)$

   Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x) = x^4(\ln x - 1)^2$
   Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$

FIN