Exercice 1 (2pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u_n} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

1. a) Montrer que $u_n > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (u_n) est **décroissante.**

c) En déduire que la suite (u_n) est **convergente**.

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

a) Montrer que (v_n) est une **suite géométrique** et déterminer sa **raison** et son **premier terme**.

b) Écrire u_n en fonction de n, puis en déduire la **limite** de la suite (u_n)

c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2025}$

Exercice 2 (4pts)

1) **Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :**

a) $z_1 = -\frac{i\sqrt{2}}{1+i}$

b) $z_2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$

c) $z_3 = \sin x + i\cos x$

2) **On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$**

a) Écrire z_3 sous forme algébrique.

b) Écrire z_3 sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3) Déterminer l 'ensemble des points M tel que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

4) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $R(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$, $z_2 = 1 + i$, et $z_3 = 1 - i$

a) Placer dans le repère R les points A, B et C

b) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$

et déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}})$

c) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment [BC] et en déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

d) Écrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique, puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 1

$$U_0 = 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

1) a) . Init : Pour $n=0$; $U_0 > 1$ car $U_0 = 2$

. Héréd : soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $U_n > 1$ et Mq : $U_{n+1} > 1$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} U_n + \frac{2-\sqrt{2}-2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} U_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(U_n - 1) > 0 \qquad (U_n > 1)$$

donc $U_{n+1} > 1$

. C/C : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 1$.

1) b) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{\sqrt{2}}{2} U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - U_n \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{2} U_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{2} U_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2} \end{aligned}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(U_n - 1) < 0$$

car $U_n > 1$ et $\sqrt{2} < 2$

d'où (U_n) est décroissante.

1) c) (U_n) est décroissante et minorée par 1, donc (U_n) est convergente

2) $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_n - 1$

a) $\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(U_n - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} V_n$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $V_0 = U_0 - 1$

$V_0 = 2 - 1 \Rightarrow V_0 = 1.$

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad V_n = V_0 . q^n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Rightarrow V_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

on a : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad V_n = U_n - 1 \Rightarrow U_n = V_n + 1$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1}$$

b) $\lim U_n = \lim \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1 = 0 + 1 = 1$

car $\lim \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad \left(0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1\right)$

c) $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2025}$

$= (V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \dots + (V_{2025} + 1)$

$= (V_0 + V_1 + \dots + V_{2025}) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{2026 \text{ fois}}$

$$= V_0 \times \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026} - 1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1} + 2026$$

$$= \frac{2 \times \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026} - 1\right]}{\sqrt{2} - 2} + 2026$$

$$= \frac{2\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026} - 1\right]}{2 - 4}(\sqrt{2} + 2) + 2026$$

$$S = \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2026}\right)(\sqrt{2} + 2) + 2026$$

Exercice 2 :

1) $z_1 = \dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$

$-i\sqrt{2} = \left[\sqrt{2} ; \frac{-\pi}{2}\right]$; $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2} ; +\frac{\pi}{4}\right]$

$z_1 = \dfrac{\left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{2}\right]}{\left[\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right]} = \left[1 ; -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[1 ; -\frac{3\pi}{4}\right]$

2) $z_2 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2}$

$1-i = \overline{(1+i)} = \left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}\right]$; $|1+i\sqrt{3}| = 2 \Rightarrow 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[2 ; \frac{\pi}{3}\right]$

$z_2 = \dfrac{\left[2 ; \frac{\pi}{3}\right]^3}{\left[\sqrt{2} ; -\frac{\pi}{4}\right]^2} = \dfrac{\left[2^3 ; \frac{\pi}{3}\times 3\right]}{\left[\sqrt{2}^2 ; -\frac{\pi}{4}\times 2\right]} = \dfrac{\left[8 ; \pi\right]}{\left[2 ; -\frac{\pi}{2}\right]} = \left[4 ; \pi + \frac{\pi}{2}\right] = \left[4 ; \frac{3\pi}{2}\right]$

3) $z_3 = \sin x + i\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left[1 ; \frac{\pi}{2} - x\right]$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

M2 : $z_3 = \sin x + i\cos x$

$= i\left(\frac{1}{i}\sin x + \cos x\right)$

$= i\left(\cos x - i\sin x\right)$

$= i\left(\cos(-x) + i\sin(-x)\right)$

$= \left[1 ; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[1 ; -x\right]$

$z_3 = \left[1 ; \frac{\pi}{2} - x\right]$

2) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

a) $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - i^2} = \dfrac{1+\sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)}{2}$

$z_3 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $|z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[2 ; \frac{\pi}{3}\right]$

$|z_2| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right]$

$$z_3 = \frac{\left[2; \frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{12}\right]$$

c) $z_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3) $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = -\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

$\iff \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$

$\iff (1+z)(1-\bar{z}) = -(1+\bar{z})(1-z)$

$\iff 1-\bar{z}+z-z\bar{z} = -(1-z+\bar{z}-\bar{z}z)$

$\iff 1-\cancel{\bar{z}}+\cancel{z}-z\bar{z} = -1+\cancel{z}-\cancel{\bar{z}}+z\bar{z}$

$\iff 2z\bar{z} = 1+1$

$\iff 2z\bar{z} = 2$

$\iff z\bar{z} = 1$ $\qquad (|z|^2 = z\bar{z})$

$\iff \sqrt{z\bar{z}} = 1$ $\qquad (|z| = \sqrt{z\bar{z}})$

$\iff |z| = 1$

$\iff |z-0| = 1$

L'ensemble des pts M est le cercle de centre O et de rayon $r = 1$

$\Rightarrow$ le cercle trigonométrique (unitaire)

M2 : soit $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)((1-x)+iy)}{(1-x)-iy((1-x)+iy)}$$

$$= \frac{(1+x)(1-x)+(1+x)iy+iy(1-x)-y^2}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{1-x^2-y^2+iy(1+x+1-x)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-x^2-y^2+iy(1+\cancel{x}+1-\cancel{x})}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} + i\,\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1-x^2-y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1$$

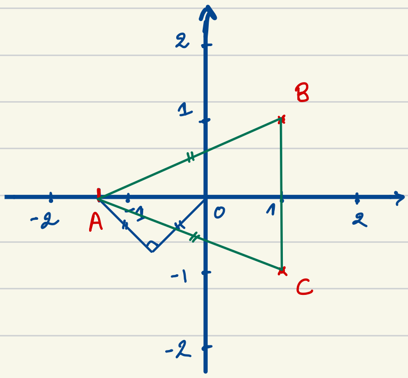
$$\Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=1^2$$

L'ensemble des pts M est le cercle de centre O et de rayon $r=1$

$\Rightarrow$ le cercle trigonométrique (unitaire)

4) $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$; $z_1=-\sqrt{2}$; $z_2=1+i$; $z_3=1-i$

a)



b)

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{1-i+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{(1+\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}+i)}{(1+\sqrt{2}-i)(1+\sqrt{2}+i)}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2}+i)^2}{(1+\sqrt{2})^2-i^2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2+2i(1+\sqrt{2})+i^2}{1+2+2\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{\cancel{1}+2+2\sqrt{2}+2i+2i\sqrt{2}-\cancel{1}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}+i(2+2\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}+i(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})[1+i](2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(\cancel{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\cancel{2})}{4-2}[1+i] = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \Rightarrow \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| |1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = 1$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \quad \text{et} \quad \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(\vec{AC}, \vec{AB})} \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

c) soit (D) la médiatrice du segment $[BC]$:

$M(z) \in (D)$: $MB = MC \Rightarrow |z - z_2| = |z - z_3|$

- $\left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = 1 \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$$

Donc $A(z_1) \in (D)$

- $z_2 = 1+i$, $z_3 = 1 - i = \overline{z_2} \Rightarrow |z_3| = |\overline{z_2}| = |z_2|$

$$\Rightarrow |0 - z_2| = |0 - z_3|$$

Donc $O(0) \in (D)$

on a : $\vec{OA} \in (D)$, donc (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$.

$$\overline{(\vec{AO}, \vec{AB})} \equiv \frac{\overline{(\vec{AC}, \vec{AB})}}{2}\,[2\pi]$$

$$\overline{(\vec{AO}, \vec{AB})} \equiv \frac{\pi/4}{2}\,[2\pi] \Rightarrow \overline{(\vec{AO}, \vec{AB})} \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$$

d) $$\frac{z_1-z_2}{z_1} = \frac{-\sqrt{2}-(1+i)}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1+i)}{2}$$

$$\frac{z_1-z_2}{z_1} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

on a : $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi] \Rightarrow \arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_0-z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$$

$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+2+4\sqrt{2}}{4}+\frac{2}{4}}$$

$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_1}\right| = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\frac{z_1-z_2}{z_1} = \left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\,;\frac{\pi}{8}\right] = \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{2+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{cases}$$

- $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$

- $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4-2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(2-\sqrt{2})\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})^2(4+2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(4+2-4\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\times 2} = \frac{1}{4}\sqrt{(12+6\sqrt{2}-8\sqrt{2}-8)\times 2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2(4-2\sqrt{2})} = \frac{1}{4}\sqrt{4(2-\sqrt{2})} = \frac{2}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$