

Exercice 1

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[6]{x}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x + 15} - 2}{x - 1}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2}$$

3. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - a}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ \frac{2x^2 + b - a}{x} & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que la fonction soit continue en 2.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 2\sqrt{x+1} + 1$

(a) Déterminer le domaine de définition D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

(b) Étudier la dérivabilité de la fonction à droite en $x_0 = -1$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

(c) Montrer que

$$\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$$

puis établir le tableau de variations de la fonction f .

(d) Soit g la fonction définie par $g(x) = x - 2\sqrt{x+1}$ définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$

1. Montrer que g admet une bijection g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.

2. Calculer $g^{-1}([2; 4])$.

3. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 2

$$f(x) = x - 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$(a) \quad x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$D_f = [-1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} f(x) &= \lim_{+\infty} (x - 2\sqrt{x+1} + 1) = \lim_{+\infty} x \left(1 - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} \right) + 1 \\ &= \lim_{+\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} \right) + 1 = \lim_{+\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} x = +\infty$$

$$(b) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x - 2\sqrt{x+1} + 1}{x+1} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x+1 - 2\sqrt{x+1}}{x+1} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x+1}{x+1} - 2 \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^2}}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = -\infty$$

$$\text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > -1: \sqrt{x+1} > 0$$

Alors la fct f n'est pas dérivable à droite en -1 .

Interprétation géométrique :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -\infty$, (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

(c) f est dérivable sur $D_f \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f \setminus \{-1\} : f'(x) &= 1 - 2 \cdot \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{(x+1) - 1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + 1)} \end{aligned}$$

$$\forall x \in D_f \setminus \{-1\} : f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + 1)}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de x

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	— + —
f	0	-1	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 1 = 0 \\ f(0) &= -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

$$(d) \quad g(x) = x - 2\sqrt{x+1}, \quad I = [0, +\infty[$$

1) g est continue en tant que somme de deux fct's continues sur I ($x \mapsto x$ et $x \mapsto -2\sqrt{x+1}$) et $\forall x \in I: x+1 \geq 0$.

g est dérivable sur I ,

$$\forall x \in I: g'(x) = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} \geq 0$$

Donc g est strictement croissante sur I

D'où g admet une bijection g^{-1} définie sur $J = g(I)$

$$J = g(I) = g([0, +\infty[) = [g(0); \lim_{+\infty} g(x)[= [-2, +\infty[$$

$$g(0) = 0 - 2\sqrt{1+0} = -2, \quad \lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} (f(x) - 1) = +\infty$$

$$2) \quad g^{-1}([2, 4]) = [g^{-1}(2); g^{-1}(4)] \quad (g^{-1} \text{ est strict croissante sur } J)$$

$$g(8) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}(2) = 8$$

$$g^{-1}(4) = d \Leftrightarrow g(d) = 4$$

on résout l'équation $g(d) = 4$

$$g(d) = 4 \Leftrightarrow d - 2\sqrt{1+d} = 4$$

$$\Leftrightarrow d - 4 = 2\sqrt{1+d}$$

$$(d-4 > 0 \Rightarrow d > 4)$$

$$\Leftrightarrow d^2 - 8d + 16 = 4 + 4d$$

$$\Leftrightarrow d^2 - 12d + 12 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 12 = 12(12-4) = 12 \times 8 = 96 > 0$$

$$\alpha = \frac{12 + \sqrt{96}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{12 - \sqrt{96}}{2}$$

$$\alpha > 4 \Rightarrow \alpha = 6 + \frac{\sqrt{12 \times 8}}{2} = 6 + \frac{\sqrt{4^2 \times 6}}{2} = 6 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{d'où } g^{-1}(4) = 6 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{Donc, } g^{-1}([2, 4]) = [8, 6 + 2\sqrt{6}]$$

$$3. \quad \forall x \in J: g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \quad (y \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y+1} = x$$

$$\Leftrightarrow y - x = 2\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow (y-x)^2 = 4(y+1)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2xy = 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy - 4y + x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2(x+2)y + x^2 - 4 = 0$$

$$\Delta = 4(x+2)^2 - 4(x^2-4) = 4[(x+2)^2 - (x+2)(x-2)]$$

$$\Delta = 4(x+2)[(x+2) - (x-2)] = 4(x+2)(4) = 16(x+2)$$

$$x > -2 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$y_1 = \frac{2(x+2) - \sqrt{16(x+2)}}{2} = (x+2) - 2\sqrt{x+2}$$

$$y_2 = (x+2) + 2\sqrt{x+2} > 0 \quad \text{d'où } y = (x+2) + 2\sqrt{x+2}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in J: g^{-1}(x) = (x+2) + 2\sqrt{x+2}$$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R}_+ telle que :

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$$

(a) Montrer que :

$$f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

(b) Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(c) Soient x et y de l'intervalle $[1; +\infty[$ tels que $x < y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$, puis en déduire la monotonie de f sur $[1; +\infty[$.

(d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; +\infty[$

(e) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,5.

Exercice 4

Soit φ une fonction continue sur $[0, 1]$ tel que : $\varphi(0) = \varphi(1)$

Montrer que l'équation $\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = \varphi(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exercise 3:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = x - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ : x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) &= x - \frac{x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \\ &= x - \frac{x}{x^{1/3}} - \frac{x}{x^{2/3}} \\ &= x - x^{1-1/3} - x^{1-2/3} \\ &= x - x^{2/3} - x^{1/3} \\ &= x - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} \\ &= x - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = f(x)$$

$$(b) \quad \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} x = +\infty$$

$$(c) \quad \text{soient } (x, y) \in [1, +\infty[: x < y \Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} < \sqrt[3]{y^2}$$

$$\cdot \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{y}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < -\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \quad (1)$$

$$\cdot \sqrt[3]{x^2} < \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < -\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < -\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \end{aligned}$$

$$\text{d'o\`u} \quad x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) < y \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \right)$$

$$f(x) < f(y)$$

$$\text{donc} \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

Alors f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

(d). f est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que somme des fcts continues sur $[1, +\infty[$ ($x \mapsto x$; $x \mapsto -\sqrt[3]{x}$; $x \mapsto -\sqrt[3]{x^2}$) avec $\forall x \in [1, +\infty[: x \geq 0$.

. f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

$$. \quad f([1, +\infty[) = [f(1); \lim_{+\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$$

$$\text{d'o\`u} \quad 0 \in f([1, +\infty[)$$

D'apr\`es le T.V.I, l'\`equation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1, +\infty[$

$$(e) \quad f(x) = x - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$. \quad f(1) = -1 < 0$$

$$. \quad f(9) > 0$$

$$\text{D'o\`u} \quad 1 < \alpha < 9 \quad 9 - 1 = 8$$

$$. \quad f\left(\frac{9+1}{2}\right) = f\left(\frac{10}{2}\right) = f(5) = 5 - \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25} \approx 0,366 > 0$$

$$\text{Alors} \quad 1 < \alpha < 5 \quad , \quad 5 - 1 = 4$$

$$. \quad f\left(\frac{5+1}{2}\right) = f(3) = 3 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} \approx -0,52 < 0$$

$$\text{donc } 3 < \alpha < 5 \quad \Rightarrow \quad 5 - 3 = 2$$

$$f\left(\frac{3+5}{2}\right) = f(4) = 4 - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{16} \approx -0,10 < 0$$

$$\text{donc } 4 < \alpha < 5 \quad \Rightarrow \quad 5 - 4 = 1$$

$$f\left(\frac{5+4}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} - \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - \sqrt[3]{\frac{81}{4}} \approx 0,12 > 0$$

$$\text{donc } 4 < \alpha < \frac{9}{2} \quad \frac{9}{2} - 4 = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Finalement

$$4 < \alpha < 4,5$$

Exercice 4

Soit φ une fonction continue sur $[0, 1]$ tel que : $\varphi(0) = \varphi(1)$

Montrer que l'équation $\varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = \varphi(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exercice 4

Soit la fct f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x)$$

- $u: x \mapsto x + \frac{1}{2}$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
 - φ est continue sur $[0, 1]$
 - $u\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[u(0); u\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset [0, 1]$
- } $\varphi \circ u$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

or φ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Donc f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ en tant que somme de deux fcts continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ($\varphi: x \mapsto -\varphi(x)$ et $\varphi \circ u: x \mapsto \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right)$)

$$f(0) = \varphi\left(0 + \frac{1}{2}\right) - \varphi(0) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi(0)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi(0)\right] \left[\varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi(1)\right] \left[\varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= - \left[\varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \left[\varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$, f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = - \left[\varphi(1) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 < 0$$

D'après le T.V.I, l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) = \varphi(x)$ admet au moins une solution dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Fin (11)



Elite⁷⁸
academy

www.elites.ac