Exercice 1

1. ***Calculer les limites suivantes :***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{tanx}\quad;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}}\quad;\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1}$$

2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :***

$$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$$

3. ***On considère la fonction f définie par :***

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-a}{x-2} & si\ \ x>2\\[2mm] \dfrac{2x^2+b-a}{x} & si\ \ x\le 2\end{cases}$$

$\boldsymbol{Déterminer\ a\ et\ b\ pour\ que\ la\ fonction\ soit\ continue\ en\ 2}$ **.**

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ x-2\sqrt{x+1}+1$

(a) Déterminer le domaine de définition D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.
(b) Étudier la dérivabilité de la fonction à droite en $x_0=-1$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
(c) Montrer que

$$\forall x\in D_f : f'(x)=\ \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$$

puis établir le tableau de variations de la fonction f.

(d) Soit g la fonction définie par $g(x)=\ x-2\sqrt{x+1}$ définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$

1. ***Montrer que g admet une bijection g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.***
2. ***Calculer $g^{-1}([2;4])$.***
3. ***Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$***

Exercise 1 :

1)

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{\tan x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\tan x}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\tan x}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$=2\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}+\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}+\sqrt[3]{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\tan x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}+\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}+\sqrt[3]{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2}+\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}+\sqrt[3]{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$$

$$=2\times\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3\times 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{\tan x}=\frac{2}{3}.$$

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}$$

$$\left\{ a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab} \right.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\sin x) - \left(\sqrt{1-\sin x}\right)^3}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2} + (1-\sin x) + \sqrt[3]{1+\sin x}\,\sqrt{1-\sin x}} \cdot \frac{1}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1+\sin x - (1-\sin x)\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2} + (1-\sin x) + \sqrt[3]{1+\sin x}\,\sqrt{1-\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1+\sin x - \sqrt{1-\sin x} + \sin x\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2} + (1-\sin x) + \sqrt[3]{1+\sin x}\,\sqrt{1-\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{\sin x\left(1+\sqrt{1-\sin x}\right) + 1 - \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt[3]{(1+\sin x)^2} + (1-\sin x) + \sqrt[3]{1+\sin x}\,\sqrt{1-\sin x}}$$

soit $A = \sqrt[3]{(1+\sin x)^2} + (1-\sin x) + \sqrt[3]{1+\sin x}\,\sqrt{1-\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(1+\sqrt{1-\sin x}\right) + 1 - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x \cdot A}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\sin x}}{A} + \frac{1-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x \cdot A}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\sin x}}{A} + \frac{\left(1-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(1+\sqrt{1-\sin x}\right)}{\tan x\, A \cdot \left(1+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\sin x}}{A} + \frac{1-(1-\sin x)}{\tan x \cdot A} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\sin x}}{A} + \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \frac{1}{A\left(1+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\sin x}}{A} + \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot \frac{1}{A\left(1+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{1+1}{3} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3\times(1+1)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\cdot)\ \lim_{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}-1\right)}{\sqrt[4]{x}\left(1-\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^{1/2}}{x^{1/4}} \frac{\left(\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}-1\right)}{1-\frac{x^{1/6}}{x^{1/4}}}$$

$$= \lim_{+\infty} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} \frac{\left(x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-1\right)}{1-x^{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}}$$

$$= \lim_{+\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{\left(x^{-\frac{1}{6}}-1\right)}{\left(1-x^{-\frac{1}{12}}\right)}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}} = -\infty$$

car $\lim_{+\infty} x^{-\frac{1}{6}} = \lim_{+\infty} x^{-\frac{1}{12}} = 0$ et $\lim_{+\infty} x^{\frac{1}{2}} = +\infty$

$$\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[4]{x+15}-2\right)\left(\sqrt[4]{x+15}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt[4]{x+15}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[4]{x+15}\right)^2-4}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x+15}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x+15}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x+15}-4\right)\left(\sqrt{x+15}+4\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+15}+4\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x+15}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+15-16}{x-1} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x+15}+2\right)\left(\sqrt{x+15}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x+15}+2\right)\left(\sqrt{x+15}+4\right)}$$

$$\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} = \frac{1}{4\times 8} = \frac{1}{32}$$

2) (E) : $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2}$

$x \in D_E \iff 1+x \geq 0$ et $1-x \geq 0$ et $1-x^2 \geq 0$

$\iff x \geq -1$ et $x \leq 1$ et $(-1 \leq x \leq 1)$

$\iff -1 \leq x \leq 1$

$D_E = [-1, 1]$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$$(E) : \left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)^3$$

$$\iff (1+x)-(1-x) - 3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}\underbrace{\left[\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}\right]}_{\sqrt[6]{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x - 3\sqrt[3]{1-x^2}\,\sqrt[6]{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x - 3 . \sqrt[6]{(1-x^2)^2}\,\sqrt[6]{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x - 3\sqrt[6]{(1-x^2)^2(1-x^2)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x - 3\sqrt[6]{(1-x^2)^3} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x - 3\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x = \sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1-x^2}$$

$$\iff 2x = 4\sqrt{1-x^2}$$

$$\iff x = 2\sqrt{1-x^2} \quad , \text{ avec } x \in [0, 1]$$

$$\iff x^2 = 4(1-x^2)$$

$$\iff x^2 = 4 - 4x^2$$

$$\iff 5x^2 = 4$$

$$\iff x^2 = \frac{4}{5}$$

$$\iff x = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$S = \left\{ \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\}$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-a}{x-2} & ; \ x > 2 \\[2ex] \dfrac{2x^2+b-a}{x} & ; \ x \leq 2 \end{cases}$$

$\cdot\ f(2) = \dfrac{2\times 2^2 + b - a}{2} = \dfrac{8+b-a}{2} = 4 + \dfrac{b-a}{2}$

$\cdot\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x^2+b-a}{x} = \dfrac{2\times 2^2+b-a}{2} = 4 + \dfrac{b-a}{2}$

$\cdot\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x^2+2x-a}{x-2}$

$;\ \text{si } a \neq 8 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \infty$

$\boxed{\text{si } a = 8} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{(x-\cancel{2})(x+4)}{x-\cancel{2}} = 6$

$$f(2) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) \iff 4 + \dfrac{b-8}{2} = 6$$

$$\iff 8 + b - 8 = 12$$

$$\iff \boxed{b = 12}$$

D'où f est continue en $2 \iff \begin{cases} a = 8 \\ b = 12 \end{cases}$

Elite academy 78