



academiaSTEM.online

“Dominando las ciencias, transformando el futuro.”

Módulo 1

FUNDAMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

**Clasificación, Comprobación de Soluciones y Problemas de Valor
Inicial**

JESUS ALFREDO MERCADO BLANCO M.Sc

CAPITULO I

Ecuaciones diferenciales: Es una igualdad que involucra una función(es) desconocida(s) y sus derivadas.

Ejemplo: Las siguientes son ecuaciones diferenciales que incluyen la función desconocida y .

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 2 \quad (1.1)$$

$$y'' + 2y' = 3y \quad (1.2)$$

$$e^y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a: SU TIPO, ORDEN y LINEALIDAD.

1. SEGÚN SU TIPO

Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se derivan, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO): si la función desconocida depende de una variable independiente.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 2; \quad \frac{dy}{dx} + 20y = e^x; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

La función desconocida “ y ” depende únicamente de la variable x

Ecuaciones diferenciales parciales (EDP): si la función desconocida depende de dos o más variables independientes.

Ejemplo:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} - \frac{2\partial u(x, y)}{\partial y}$$

En este caso, la función desconocida depende de dos variables x e y .

2. SEGÚN EL ORDEN

El orden de una ecuación diferencial bien sea ordinaria o parcial, es la derivada de mayor orden en la ecuación.

Ejemplo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Expresión de esta forma, indica el GRADO. Como la derivada está a la tres, entonces es de TERCER GRADO.

La derivada está a la dos, entonces la ecuación es de SEGUNDO ORDEN

$$(3+x)\frac{d^3 y}{dx^3} - 5x^2 \frac{dy}{dx} - 6y = \text{sen}(x) : \text{Ecuación diferencial de tercer orden.}$$

$$e^y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 : \text{Ecuación diferencial de segundo orden.}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de orden “n” suele representarse por la expresión:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

3. SEGÚN LA LINEALIDAD

Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{(n-1)}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{(n-2)}(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Es decir, que la derivada de la ecuación ya sea ordinaria o parcial debe tener exponente uno, así:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^1 \text{ ó } \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

En las ecuaciones diferenciales lineales se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La variable diferenciante y todas sus derivadas son de primer grado es decir; la potencia de todo término donde aparezca “y” debe ser uno.
- Cada coeficiente de “y” y todas sus derivadas sólo dependen de “x”.

Ejemplo 1:

Determina la linealidad de la siguiente ecuación diferencial.

$$(3+x)y'' - 5x^2y' - 6y = \text{sen}(x)$$

De acuerdo a la forma de linealidad tenemos:

$$\begin{array}{cccc} (3+x)y'' - 5x^2y' - 6y = \text{sen}(x) \\ \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \\ a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \end{array}$$

Cada coeficiente de “y” y sus derivadas dependen de “x”, luego la ecuación es lineal.

Ejemplo 2:

Determina la linealidad de la siguiente ecuación diferencial.

$$yy' + 2y = 1 + x^2$$

Tenemos:

$$a_1(x) = y$$

$$a_0(x) = 2$$

$$g(x) = 1 + x^2$$

Por lo tanto no es lineal, debido a que la derivada de y’ depende “y” y no de “x”

Ejemplo 3:

Determina la linealidad de la siguiente ecuación diferencial.

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$$

No es lineal porque el grado de la derivada dy/dx es cuatro (4).

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Decimos que una función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial si ésta satisface cuando “y” y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus correspondientes derivadas. La función $y = f(x)$ se llama solución o integral de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1:

Verificar si $y = e^{-3x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' = 3y$

Solución:

De acuerdo a las derivadas que tenga la ecuación diferencial, se aplica a la función dada así:

$$y' = -3e^{-3x}$$

$$y'' = 9e^{-3x}$$

Ahora, reemplazo estas derivadas en la ecuación diferencial. Si resulta una identidad es solución.

$$y'' + 2y' = 3y$$

$$9e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) = 3(e^{-3x})$$

$$9e^{-3x} - 6e^{-3x} = 3e^{-3x}$$

$$3e^{-3x} = 3e^{-3x}$$

Como el resultado es una identidad, entonces es solución.

Ejemplo 2:

Verificar si $y = 4x$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$

Solución:

Como la ecuación diferencial es de primer orden, entonces se halla la derivada de la función dada.

$$\frac{dy}{dx} = 4, \text{ ahora reemplazamos en la ecuación}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$

$$4 = \frac{4(4x)}{x}$$

$4 = 16$. Como el resultado no es una identidad, entonces la función no es solución de la ecuación.

TALLER 1

1. En cada una de las ecuaciones diferenciales, determina el Tipo (Ordinaria o parcial), el orden (primer, segundo o tercer orden. Etc.) y la linealidad

a) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = \cos(y)$

b) $x^2 dy + (y - xy - xe^x) dx = 0$

c) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2}$

d) $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-k}{r^2}$

e) $\sin(x)y''' - \cos(x)y' = 2x(x - y)$

f) $(1 - y^2)dx + xdy = 0$

g) $(1 + y^2)y' + 4xy = \cos(x)$

h) $\frac{d^2 y}{dx^2} + x \cdot \cos(y) = x^2$

i) $x^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 5x^2 y^2 = \cos(x)$

2. En cada uno de los siguientes ejercicios compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial.

a) $2y' + y = 0$ si $y = e^{-x/2}$

b) $g'(x) = \frac{3x}{4g(x)}$ si $g(x) = \frac{\sqrt{3x^2}}{2}$

c) $y' = 25 + y^2$ si $y = 5 \tan(5x)$

d) $f'(x) = \frac{2x + 5y}{x}$ si $f(x) = x^5 - 2x$

e) $\frac{dy}{dx} = y \cdot (2x - 5)$ si $y = -e^{x^2 - 5x}$

f) $\frac{dy}{dx} = 5y$ si $y = 3e^{x^5}$

SOLUCIÓN EXPLÍCITA E IMPLÍCITA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Decimos que una función $y = f(x)$ es una solución EXPLÍCITA de la ecuación diferencial si la variable dependiente se expresa tan sólo en términos de la variable independiente y constantes

Ejemplo: Demuestre que la función $y = x^2 - x^{-1}$ es una solución explícita de la ecuación

diferencial $y'' - 2\frac{y}{x^2} = 0$

Solución

Observamos que una solución de la ecuación está dada de manera explícita, porque la variable dependiente “y” está despejada y en términos de la variable independiente “x”. Luego sacamos la segunda derivada a la función, reemplazamos y resolvemos.

$$y = x^2 - x^{-1}$$

$$y' = 2x + x^{-2}$$

$$y'' = 2 - 2x^{-3}$$

Sustituimos: $(2 - 2x^{-3}) - 2\frac{(x^2 - x^{-1})}{x^2} = 0$ y resolvemos

$$(2 - 2x^{-3}) - 2\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{x^{-1}}{x^2}\right) = 0$$

$$(2 - 2x^{-3}) - 2(1 - x^{-3}) = 0$$

$$2 - 2x^{-3} - 2 + 2x^{-3} = 0$$

$$0 = 0$$

Decimos que una relación $G(x, y)$ es una solución IMPLÍCITA de la ecuación diferencial si la variable dependiente no se expresa en términos de la variable independiente ni está claramente despejada.

Ejemplo: Demuestre que la función $y^2 - x^3 + 8 = 0$ es una solución implícita de la ecuación

diferencial $\frac{dy}{dx} - \frac{3x^2}{2y} = 0$

Solución

Observamos que una solución de la ecuación está dada de manera implícita, porque la variable dependiente “y” no está despejada. Luego derivamos implícitamente a la función, reemplazamos y resolvemos.

$$y^2 - x^3 + 8 = 0$$

$2y \cdot \frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$; Ahora manipulamos algebraicamente esta derivada implícita, lo cual resulta.

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} - \frac{3x^2}{2y} = 0}$$

Con este resultado hemos comprobado que la función implícita es una solución de la ecuación, puesto que arroja el mismo resultado.

Ejercicios

Verificar la solución explícita o implícita en las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y'' + (y')^2 = 0$ si $y = \ln|x + c_1| + c_2$
2. $(2xy - \sec^2 x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$ si $x^2y - \tan(x) + y^2 = 0$
3. $(3x^2y^2 + 2)dy + (2xy^3 - 3)dx = 0$ si $x^2y^3 - 3x + 2y = c$
4. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ si $c_1(x + y)^2 = x \cdot e^{y/x}$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL DE PRIMER ORDEN

Consiste en hallar una función que cumpla en la ecuación diferencial unas condiciones dadas.

Ejemplo 1:

Encontrar al menos dos soluciones del problema del valor inicial. $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$ si $y(0) = 0$

Solución

Para determinar el valor inicial debemos aplicar dos pasos:

- ✓ Separar cada diferencial con su respectiva variable, es decir, el "dx" debe estar acompañada con expresiones que contengan la variable "x", de igual forma para el diferencial "dy".

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \Leftrightarrow dy = 3y^{2/3} dx \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx}$$

- ✓ Aplicamos a ambos de la igual el antiderivacional, es decir, la integral indefinida.

$$\int \frac{dy}{3y^{2/3}} = \int dx, \text{ resolvemos}$$

$$\frac{1}{3} \int y^{-2/3} dy = \int dx \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3 = y^{1/3} = x + c \Rightarrow \boxed{y = (x + c)^3}$$

La condición es $y(0) = 0$, sustituyendo en la función obtenida tenemos:
 $0 = (0 + c)^3 \Rightarrow c = 0$

Luego, la función inicial es $y = x^3$

Ejemplo 2:

Encontrar al menos dos soluciones del problema del valor inicial. $y' = y$ Si $y(0) = 3$

Solución

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx, \text{ donde si integramos, nos queda:}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$\ln|y| = x + c$, aplicando "e" a ambos lados de la igualdad procedemos:

$$e^{\ln|y|} = e^{x+c} \Rightarrow y = e^c \cdot e^x, \text{ reemplazando a } k = e^c \text{ obtendremos } y = k \cdot e^x$$

La condición es $y(0) = 3$, sustituyendo en la función obtenida tenemos: $3 = k \cdot e^0 \Rightarrow k = 3$

Luego, la función inicial es $y = 3.e^x$

TALLER 2

1. Verificar la solución explícita o implícita en las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x.\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - 1)y}{3(x - x.\operatorname{sen}(x))}$ si $xy^3 - xy^3\operatorname{sen}(x) = 1$

b) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$ si $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

c) $2xydx + (x^4 - y)dy = 0$ si $-2x^2y + y^2 = 1$

d) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$ si $y = e^{3x} + 10e^{2x}$

e) $y'' + 5y' + 6y = 0$ si $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

f) $2ydy + dx = 0$ si $y^2 + x - 3 = 0$

2. Encontrar al menos dos soluciones del problema del valor inicial en cada ecuación diferencial.

a) $4 + e^{-5x}y' = 0$ si $y(0) = 2$

b) $y' + y^2 - y = 0$ si $y(3) = 4$

SOLUCIÓN DEL TALLER 1

1.

- | | | |
|--|--|--|
| a) Ordinaria; segundo orden; no lineal | b) Ordinaria; primer orden; lineal | c) Ordinaria; segundo orden; no lineal |
| d) Ordinaria; segundo orden; no lineal | e) Ordinaria; tercer orden; lineal | f) Ordinaria; primer orden; lineal |
| g) Ordinaria; primer orden; no lineal | h) Ordinaria; segundo orden; no lineal | i) Ordinaria; cuarto orden; no lineal |

2.

- | | |
|-------|-------|
| a) Si | b) Si |
| c) Si | d) No |
| e) Si | f) No |

SOLUCIÓN DEL TALLER 2

1.

- a) Sí es solución.
- b) Sí es solución.
- c) Sí es solución.
- d) NO es solución (La derivada es $\ln(x) + 1$, que no es igual a $\frac{y}{x} = \ln(x)$).
- e) Sí es solución (Derivación implícita).
- f) Sí es solución.

2. Problemas de Valor Inicial (PVI):

- a) $y = 4x - \frac{1}{5}e^{-5x} + \frac{11}{5}$
- b) $y = -\frac{4}{5}e^{5x} + \frac{14}{5}$