www.tmprepa.fr

PDF n°10

Thème 6 : Espaces vectoriels

1. Généralités

Considérons une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, donc avec les vecteurs $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. Nous noterons E_3 l'ensemble des vecteurs de l'espace, $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, et $P_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré **au plus 2**. On a donc $P_2(\mathbb{R}) \subset F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemples : • $\vec{0} \in E_3$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} \in E_3$

exp appartient à $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais pas à $P_2(\mathbb{R})$

• $exp \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash P_2(\mathbb{R})$; la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3x+1$ appartient à $P_2(\mathbb{R})$ donc à $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il en est de même des fonctions $x\mapsto 0,\ x\mapsto 3x-1$, tandis que $x\mapsto x^3-5x$ appartient à $F(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash P_2(\mathbb{R})$

Remarque : Munis des opérations usuelles, les ensembles E_3 et $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ont des propriétés communes qui font d'eux ce qu'on appelle des $\mathbb{R}$-**espaces vectoriels**. *La définition précise d'espace vectoriel sera définie en classe prépa et L1.*

Propriété et définition : Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E contient un **unique** élément noté 0_E appelé **élément neutre** de E, vérifiant : $\forall x\in E,\ \ x+0_E=x$

Exemples : • $0_{E_3}=\vec{0}$ car pour tout $\vec{u}\in E_3$, $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

• $0_{F(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est la fonction nulle $x\mapsto 0$ car pour tout $f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)+0=f(x)$.

Propriété : Un ensemble E inclus dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si et seulement s'il est non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire : $\forall x,y\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha x+\beta y\in E$

donc on doit avoir $\alpha x\in E$

Exemples : • Montrons que $P_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$P_2(\mathbb{R})\subset F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $P_2(\mathbb{R})\neq\emptyset$ (car $x\mapsto 1$ appartient à $P_2(\mathbb{R})$). Soient $f,g\in P_2(\mathbb{R})$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$\exists a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0 \text{ et } g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} : (\alpha f+\beta g)(x) &= \alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha(a_2x^2+a_1x+a_0)+\beta(b_2x^2+b_1x+b_0)\\ &=(\alpha a_2+\beta b_2)x^2+(\alpha a_1+\beta b_1)x+\alpha a_0+\beta b_0\end{aligned}$$

Donc $af+\beta g\in P_2(\mathbb{R})$.

• $F=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\ /\ f\ croissante\}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car $exp\in F$ mais $-exp\notin F$.

Exercice 1 : Soient $F=\{f\in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\ /\ f(1)=0\}$, $G=\left\{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}/\ x+y+z=0\right\}$ et $H=\left\{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}/\ x+y+z=1\right\}$.

Montrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels mais que H n'en est pas un.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'une partie $\{x_1;x_2\ ;\dots;x_n\}$ de E :

• est **libre** si pour tous $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, on a : $a_1x_1+a_2x_2+\ \dots+\ a_nx_n=0_E \implies a_1=a_2=\cdots=a_n=0$

• est **génératrice** de E si : $\forall x\in E,\ \exists\ a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R},\ x=a_1x_1+a_2x_2+\ \dots+\ a_nx_n$

Exemple : $\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ est une partie libre et génératrice de E_3 car si $a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}=\vec{0}$ alors $\vec{0}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'où $a=b=c=0$,

et si $\vec{u}\in E_3$, il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$, tels que $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\vec{u}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$.

Exercice 2 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que :

a) $F=\left\{f_k : x\mapsto\sum_{i=0}^{k}(i+1)x^i\ /\ k\in[\![0;2]\!]\right\}$ est une partie libre et génératrice de $P_2(\mathbb{R})$.

b) $G=\{sin\ ;cos\}$ et $H=\{f_k : x\mapsto e^{kx}\ /\ k\in[\![0;n]\!]\}$ sont des parties libres non génératrices de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.