



PDF n°9

Thème : Parties denses dans $\mathbb{R}$

Définition : Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que E est **dense** dans $\mathbb{R}$ si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a $]a; b[\cap E \neq \emptyset$.

Exemples

• Montrons par l'absurde que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Supposons le contraire c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que $]a; b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \emptyset$.

Alors, pour tout $x \in]a; b[$ on a $x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, d'où $x \in \mathbb{Z}$. On a donc $]a; b[\subset \mathbb{Z}$, ce qui est impossible, d'où la contradiction.

• $[0; +\infty[$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car, par exemple, $] - 2; -1[\cap [0; +\infty[= \emptyset$.

• Nous montrerons dans l'exercice 3 que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels non entiers

Propriété : Une partie E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (e_n) d'éléments de E qui converge vers x .

Exemples : • Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que $\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.

• Si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f = g$ sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui converge vers x .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(q_n) = g(q_n)$. De plus, les fonctions f et g étant continues sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n)$ et $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(q_n)$, d'où $f(x) = g(x)$.

Exercice 1

a) $\mathbb{Z}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$? Justifier.

b) $\mathbb{R}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 2

1) a) Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, considérer la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$.

b) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) a) Justifier que si $q \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $q + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) En déduire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : Considérer $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ puis par exemple l'intervalle $]a - \pi; b - \pi[$.

Exercice 3

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f(1) = e \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y) \end{cases}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = e^n$

b) Montrer que : $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = e^q$

c) En déduire que $f = \exp$.