



PDF n°8

Thème : Compléments sur les suites numériques

1. Définitions avec quantificateurs

Définitions : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et $L \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| < \varepsilon$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A$

Exemple : Montrons à partir de la définition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

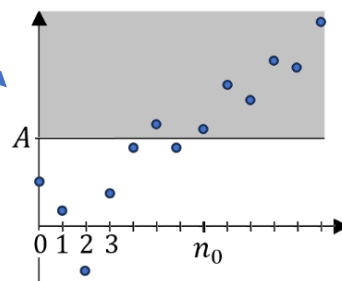
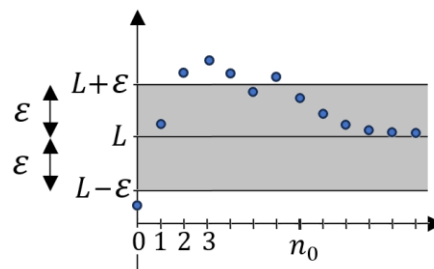
Soit $n \geq n_0$. On a $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, donc $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

On en déduit que $n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ d'où $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Puisque $\frac{1}{n} > 0$ alors $\left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$, d'où $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$.

On a prouvé que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$



Exercice 1

Montrer à partir de la définition que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Exercice 2

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite convergente telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Soit (v_n) la suite définie par la moyenne des n premiers termes de (u_n) :

$$\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

On souhaite prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Pour cela on considère un réel $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\left| \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

c) Conclure.