



Thème : Calculs de sommes

4. Sommes multiples et interversions (2^e partie)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n^2 nombres réels $a_{i,j}$ que l'on a rangé dans le tableau ci-contre de sorte que pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{i,j}$ soit le nombre placé sur la i -ième ligne et j -ième colonne de ce tableau.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,n}$
...	...	...	...
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,n}$

Notation et propriété : Les nombres du tableau situés sur ou au-dessus de la diagonale sont les $a_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$. La somme de ces nombres se note

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}.$$

et on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,n}$
...	...	...	...
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,n}$

On fait la somme des sommes des nombres de chaque colonne.

On fait la somme des sommes des nombres de chaque ligne.

Exemple :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} j^2 + \frac{1}{2} j \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les sommes suivantes.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme suivante.

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}$$

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons T_n le nombre de triplets $(i; j; k)$ d'entiers avec $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$.

a) Déterminer T_1 et T_2 .

b) Déterminer l'expression de T_n en fonction de n .