TERM Maths Prépa

www.tmprepa.fr

PDF n°5

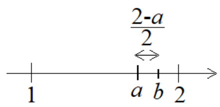
Thème : Bornes supérieure et inférieure

1. Plus grand et plus petit élément. Majorant et minorant.

Définitions et notations : Soit $A \subset \mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$.
● On dit que A possède un **plus petit élément** s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, on a $a \leq x$.
Ce plus petit élément a de A est alors noté $\mathbf{min}\, \boldsymbol{A}$.
● On dit que A possède un **plus grand élément** s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, on a $x \leq a$.
Ce plus grand élément a de A est alors noté $\mathbf{max}\, \boldsymbol{A}$.

Exemple : Soit $A = [1;2[$.
● $\min A = 1$ car $1 \in A$ et pour tout $x \in A$ on a $1 \leq x$.
● $\max A$ n'existe pas.

Montrons-le par l'absurde. Supposons que A possède un plus grand élément a.
Alors $a \in A$ donc $1 \leq a < 2$ et pour tout $x \in [1;2[$ on a $x \leq a$.
Posons $b = a + \frac{2-a}{2}$. On a donc aussi $b = 2 - \frac{2-a}{2}$. Puisque $a < 2$ on en déduit que $\frac{2-a}{2} > 0$ donc $a < a + \frac{2-a}{2}$ d'où $a < b$. On en déduit aussi que $2 - \frac{2-a}{2} < 2$ c'est-à-dire $b < 2$.
On obtient $1 \leq a < b < 2$, ce qui prouve que b est un élément de A supérieur à a, d'où la contradiction.



Exercice 1 : Soit $B = \left\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
L'ensemble B possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Définitions : Soit $A \subset \mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$.
● On dit que m est un **minorant** de A si pour tout $x \in A$, on a $m \leq x$. Dans ce cas, A est dit **minoré**.
● On dit que M est un **majorant** de A si pour tout $x \in A$, on a $x \leq M$. Dans ce cas, A est dit **majoré**.
● On dit que A est **borné** s'il est minoré et majoré.

Remarque : S'ils existent, le minimum est un minorant et le maximum est un majorant.

Exemples : • L'intervalle $[1;2[$ est borné car par exemple minoré par $\frac{2}{3}$ et majoré par 5.
• L'intervalle $[0;+\infty[$ est minoré mais non majoré.

Exercice 2 : Soit $C = \left\{\frac{p}{p+q} \ / \ p, q \in \mathbb{N}^*,\ p < q\right\}$.
a) Justifier que C est majoré.
b) L'ensemble C possède-t-il un plus grand élément ?

Remarque : Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, pour montrer que $A = B$, il faut prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
Lorsqu'on ne peut pas prouver directement cette équivalence, on montre les deux implications réciproques, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}, x \in A \Longrightarrow x \in B$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in B \Longrightarrow x \in A$.

Exercice 3 : Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $A + B$ par
$$A + B = \{a + b \ / \ a \in A, b \in B\}.$$

Par exemple, $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$. En effet, si $x \in \mathbb{N} + \mathbb{N}$, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $x = n + m$. Puisque $n, m \in \mathbb{N}$, alors $n + m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{N}$. Réciproquement, si $x \in \mathbb{N}$, alors $x \in \mathbb{N} + \mathbb{N}$ car $x = x + 0$ et $0 \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer $\{1\} + \mathbb{N}$.
b) Montrer que si A et B sont majorées, alors $A + B$ est majoré.