TERM Maths Prépa

www.tmprepa.fr

PDF n°4

Thème : Partie entière

Définition et notation : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif n tel que $x \in [n\,; n+1[$.

Exemple : $\lfloor 7{,}26 \rfloor = 7$; $\lfloor -7{,}26 \rfloor = -8$; $\lfloor 7 \rfloor = 7$; $\lfloor -7 \rfloor = -7$

Conséquences : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad \lfloor x \rfloor = y \iff \begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ y \leq x < y+1 \end{cases}$

Exemple : Montrons que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor = n^2 + n$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4}$ donc $n^2 + n \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < n^2 + n + 1$.

De plus, $n^2 + n \in \mathbb{Z}$, d'où $\left\lfloor \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor = n^2 + n$

Exercice 1 : Vrai ou faux ? Justifier.

a) « $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ »

b) « $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ »

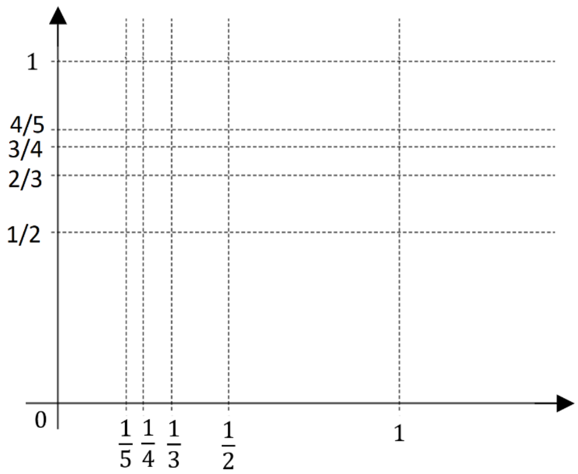
Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]\frac{1}{p+1}; \frac{1}{p}\right],\ f(x) = px$

b) Donner l'allure de la courbe représentative C_f de f dans le repère ci-contre.



3) a) Conjecturer l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = 1.$$

b) Résoudre cette équation.

Exercice 3 : Soit $n \geq 2$ un entier.

Déterminer l'expression de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

Indications : Au brouillon, écrire les premiers termes de la somme puis regrouper les termes consécutifs constants …