www.tmprepa.fr

PDF n°3

Thème : Calculs de sommes

4. Sommes multiples et interversions

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,n}$
…	…	…	…
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	…	$a_{n,n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n^2 nombres réels $a_{i,j}$ que l'on a rangé dans le tableau ci-contre de sorte que pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,j}$ soit le nombre placé sur la i-ième ligne et j-ième colonne de ce tableau.

Notation et propriété : La somme de ces n^2 nombres est notée

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} \ .$$

et on a :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,n}$
…	…	…	…
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	…	$a_{n,n}$

On fait la somme des sommes des nombres de chaque ligne.

On fait la somme des sommes des nombres de chaque colonne.

Exemple :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} j^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}$$

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme suivante.

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} 2^i \times 3^j$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme suivante, où on note $\min(i;j)$ le minimum de i et j. Donc par exemple $\min(5\,;3) = 3$ et $\min(6\,;6) = 6$.

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i;j)$$

Exercice 3 :

On admet (simple à prouver !) que la linéarité de la somme s'applique aussi aux sommes doubles, c'est-à-dire qu'une somme du type

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} (x a_{i,j} + y\, b_{i,j})$$

peut aussi s'écrire

$$x\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} + y\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j} \ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme suivante.

$$S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$$

Indications : Remarquer que $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{j}{i+j}$ puis que $S_n + S_n$ peut alors se calculer facilement.