



PDF n°2

Thème : Calculs de sommes

3. Linéarité de la somme

Propriété : Soient $n_0, n_1 \in \mathbb{N}^*$ avec $n_0 \leq n_1$.

Si pour tous $k \in \llbracket n_0; n_1 \rrbracket$, $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ et si $a, b \in \mathbb{R}$ alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} (a u_k + b v_k) = a \sum_{k=n_0}^{n_1} u_k + b \sum_{k=n_0}^{n_1} v_k$$

Exemple : Détermination de la somme des n premiers nombres impairs positifs

Les nombres impairs sont les nombres de la forme $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les n premiers nombres impairs positifs sont : $2 \times 0 + 1$; $2 \times 1 + 1$; $2 \times 2 + 1$; ... ; $2(n - 1) + 1$

Leur somme est alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2 \times \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n \times 1 = n(n-1) + n = n(n-1+1) = n^2$$

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=1}^n (4k + 3) \quad \sum_{k=1}^{2n} (3(-1)^k k + 2)$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2.$$

a) Exprimer la somme suivante en fonction de S_n .

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$$

b) En déduire S_n .

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right).$$