www.tmprepa.fr

PDF n°1

Thème : Calculs de sommes

1. Généralités

Rappel : Si $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \leq n_1$ et si $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_{n_1} \in \mathbb{R}$ alors

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1}.$$

Cette somme admet $n_1 - n_0 + 1$ terme(s).

Exemple : Pour tout entier $n \geq 5$ la somme

$$\sum_{k=5}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

admet $n - 5 + 1 = n - 4$ terme(s).

Notation et exemple : Si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$ alors on note $[\![a; b]\!]$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \,/\, a \leq n \leq b\}$ des nombres entiers compris entre a et b.
Donc par exemple $[\![2; 7]\!] = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Exercice 1 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. Déterminer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$$

2. Sommes télescopiques

Remarque : Si (u_n) est une suite de réels et si $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \leq n_1$ alors

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} (u_{k+1} - u_k) = u_{n_1+1} - u_{n_0} \ .$$

Tous les termes se télescopent deux à deux sauf le 1er et le dernier : On dit qu'il 'agit d'une **somme télescopique.**

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(e^{k+1} - e^k\right) = e^{n+1} - e^0 = e^{n+1} - 1\,.$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\ .$$

Indication : Supprimer les racines carrées au dénominateur.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Déterminer l'expression de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\ .$$

Indication : écrire $\frac{1}{k(k+1)}$ sous la forme $u_k - u_{k+1}$.

b) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{n}{n+1}$$